6

الفصل السادس

Chapter Six

Space Geometry الهندسة الفضائية

[6-1] تمهيد

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

[6-3] الاسقاط العمودي على مستو.

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$	الزواية الزوجية بين (y) , (x)
L - A	المساحة الجانبية
T - A	المساحة الكلية
(x)	المستوي X

[6-1] تمهيد.

سبق وان علمنا أن كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقط وأن كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً وواحداً فقط وكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً واحداً فقط، وكل اربعة نقط لا تقع في مستو واحد تعين فضاء. اي أن المستقيم يحتوي على نقطتين على اقل تقدير، والمستوي يحتوي على ثلاث نقط على اقل تقدير لا يحتويها مستقيم واحد، والفراغ يحتوي على على اربع نقط على اقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.

كما تعرفنا في الصف الخامس العلمي على علاقات بين المستقيمات والمستويات وبرهنا بعض المبرهنات التي يمكن الافادة منها في مبرهنات جديدة ستتعرف عليها في هذا الفصل.

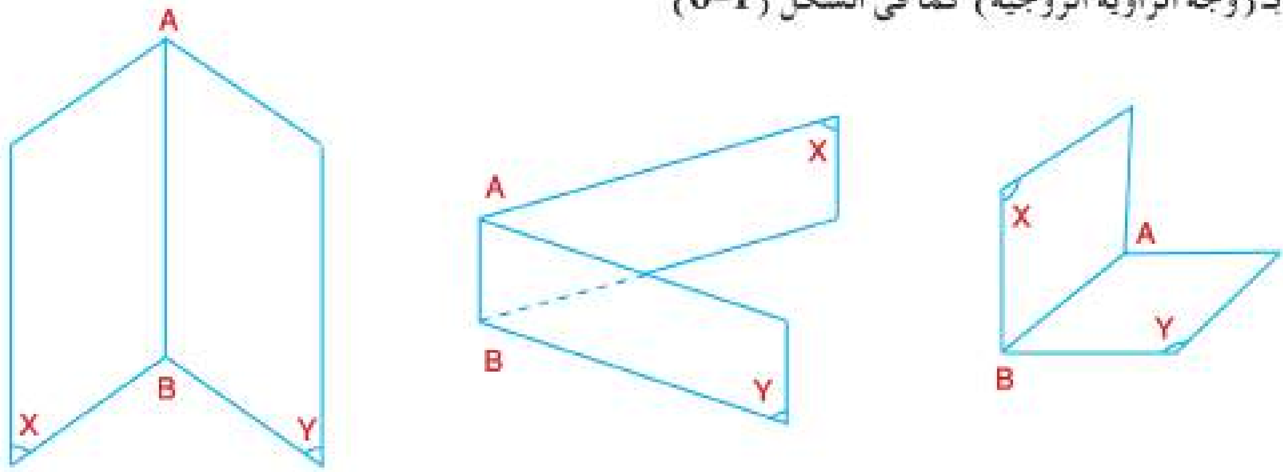
ولكي تتمكن من التواصل معنا وتتعرف على علاقات جديدة بين المستقيمات والمستويات، والمستويات والمستويات وتكتسب مفاهيم جديدة وتبرهن مبرهنات اخرىما عليك الا الرجوع الى مراجعة ما درسته في هذا الموضوع في السنة السابقة.

[2-6] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

تعـــريـف[1-2-6]

الزاوية الزوجية : اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة.

تسمى الحافة المشتركة بـ(حرف الزاوية الزوجية **Edge of Dihedral**) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ(وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (1-6)



الشكل (1-6)

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ، (X) و (Y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى.

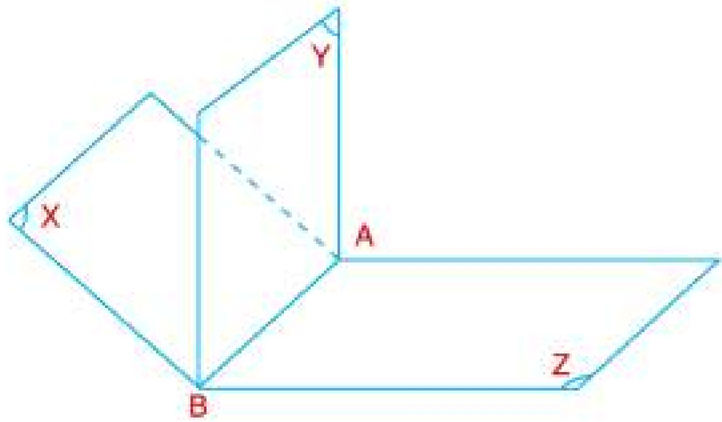
مثلاً :

الزاوية الزوجية

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

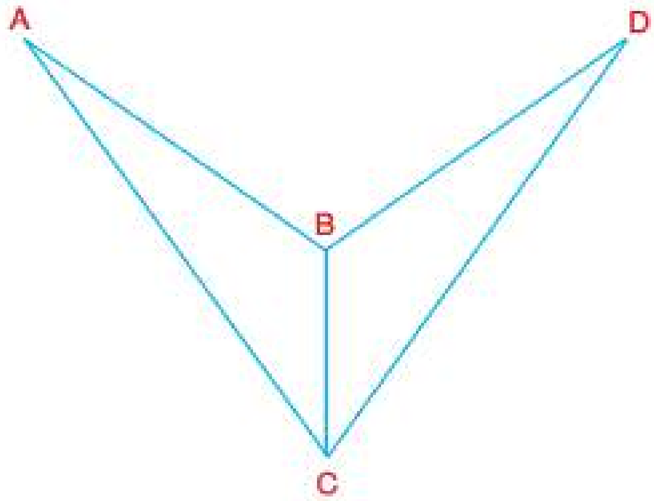
$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$



الشكل (2-6)

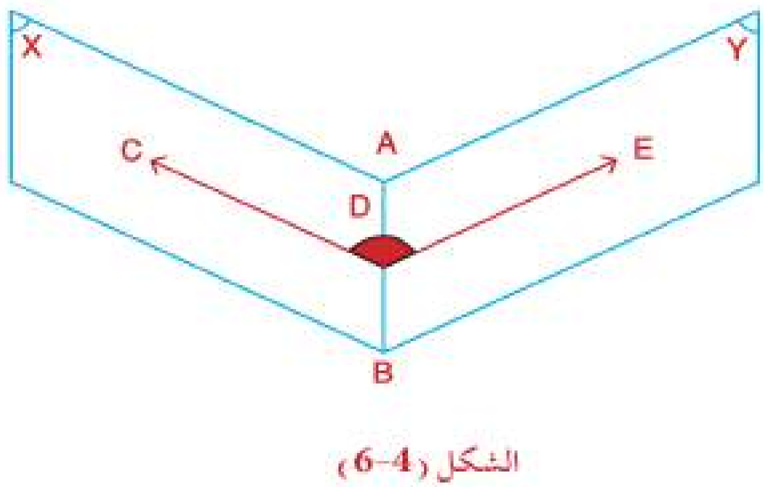
ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية.

ملاحظة عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد، نكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ او الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) , (DBC) . كما في الشكل (3-6)



الشكل (3-6)

وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية. (كما في الشكل (4-6))



الشكل (4-6)

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC} \subset (X), \overrightarrow{DE} \subset (Y)$$

$$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore$ $\angle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ او $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$

تعريف [6-2-2]

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية : هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية
أو هي اتحاد شعاعين عمودين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي

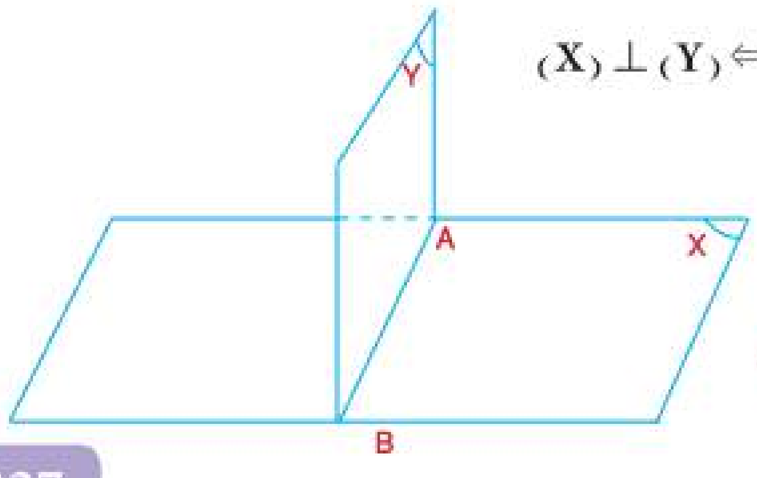
1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت

2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف[6-2-3]

اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فان المستويين متعامدان وبالعكس

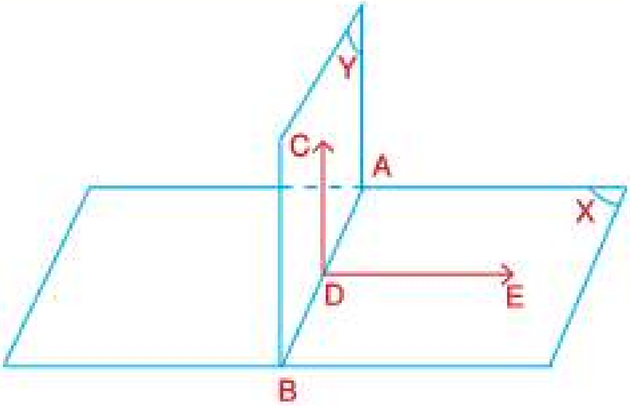
$$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow (X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ$$ قياس



الشكل (6-5)

مبرهنة (7) :

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



اي انه:

اذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

$(X) \perp (Y), \quad (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}, \qquad \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \angle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore \quad m\angle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

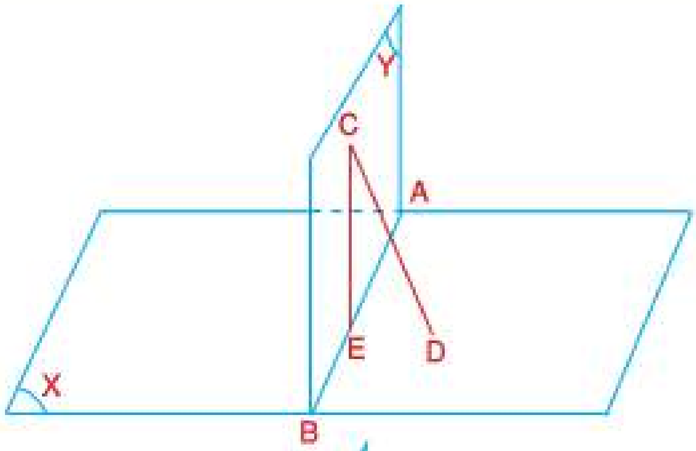
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

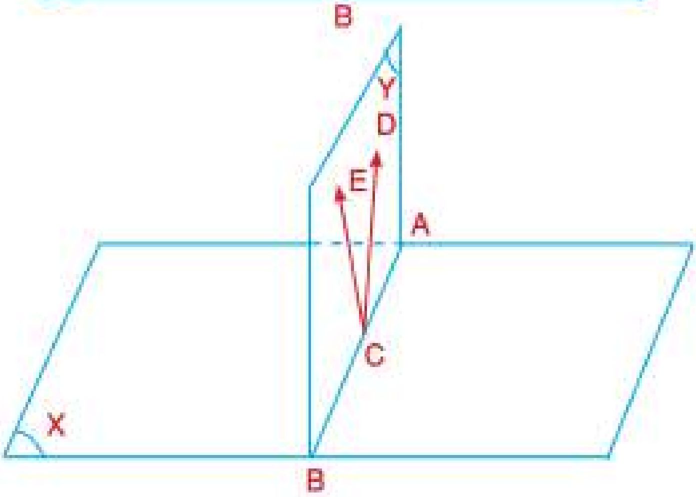
و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه.

اي انه:





$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

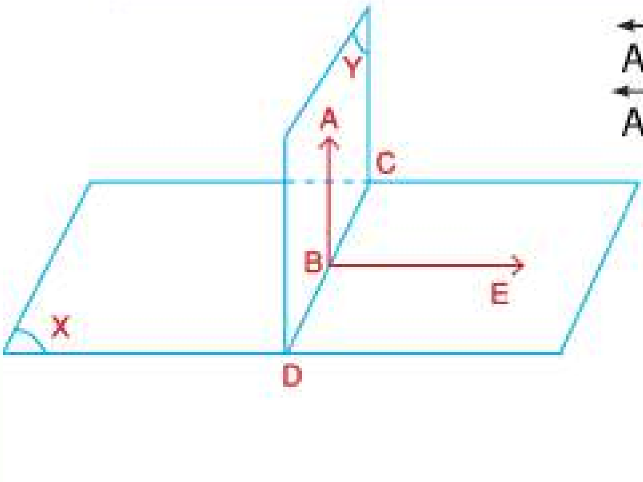
مبرهنة (8):

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

اي انه:

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)\end{array}\right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $\overleftrightarrow{CD} = (X) \cap (Y)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \angle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m\angle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة (9):

من مستقيم غير عمودي علىمستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.

اي انه:

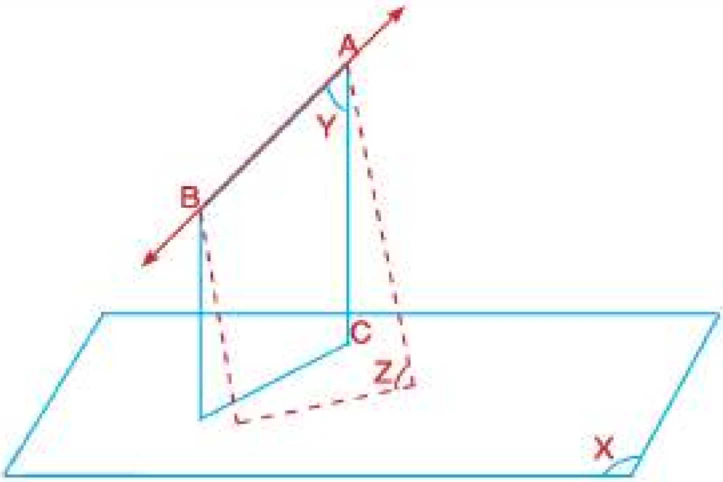
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$

وعمودي على (X)

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)



المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

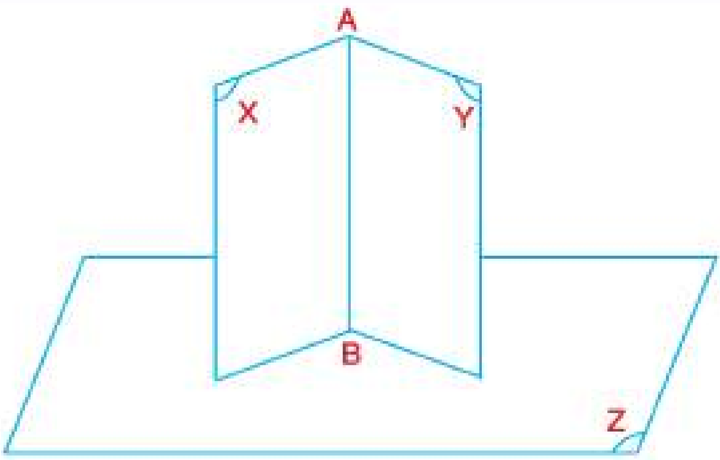
$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X),(Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

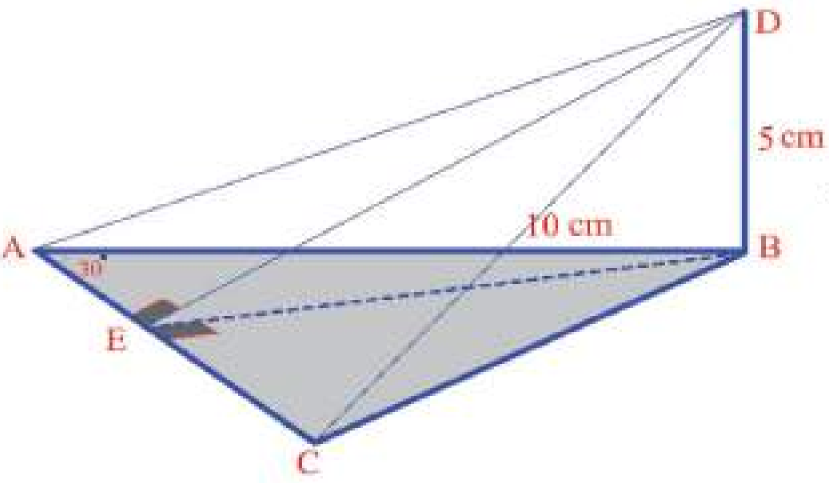
ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ و.هـ.م

نشـــاط : توجد طرق اخرى لبرهان هذه المبرهنة ، حاول ذلك.

مثال – 1–



في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\angle A = 30°$

$AB = 10\ cm$ ، $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\angle BAC = 30°$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5\ cm$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \angle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

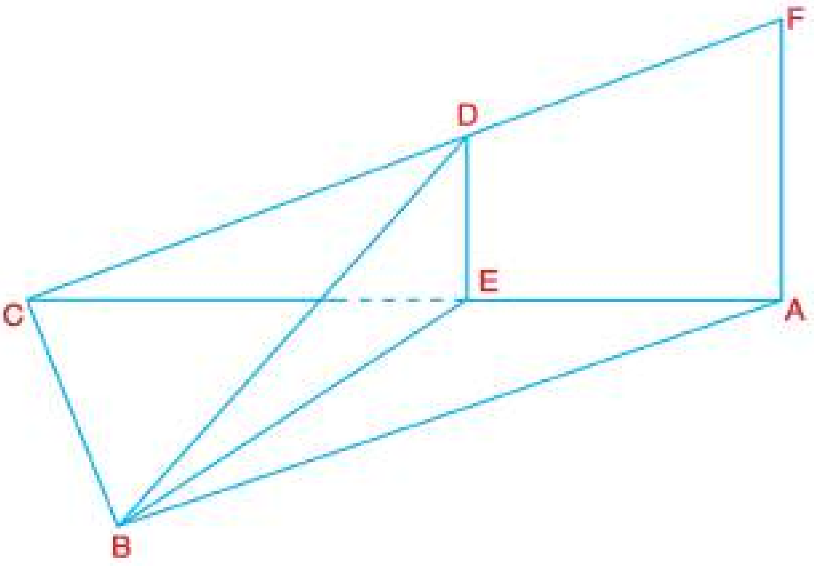
$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\angle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و. هـ. م

مثال - 2-



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

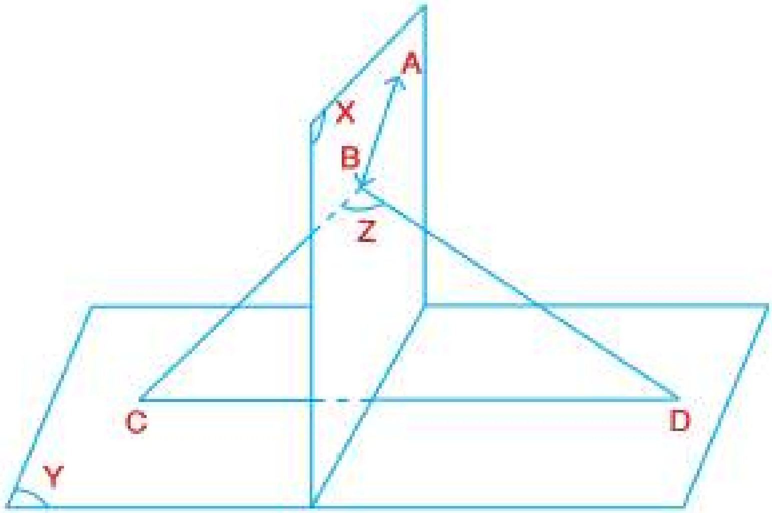
$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because$ $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و . هـ . م

مثال - 3 -



$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات :

إن $(Y) \perp (X)$ ، $(X) \supset \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BC}$ عمودين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (Z) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Y) \cap (Z)$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و . هـ . م

تمارين

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .

2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .

3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .

4. A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\angle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$ برهن ان $CD = BD$.

5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .

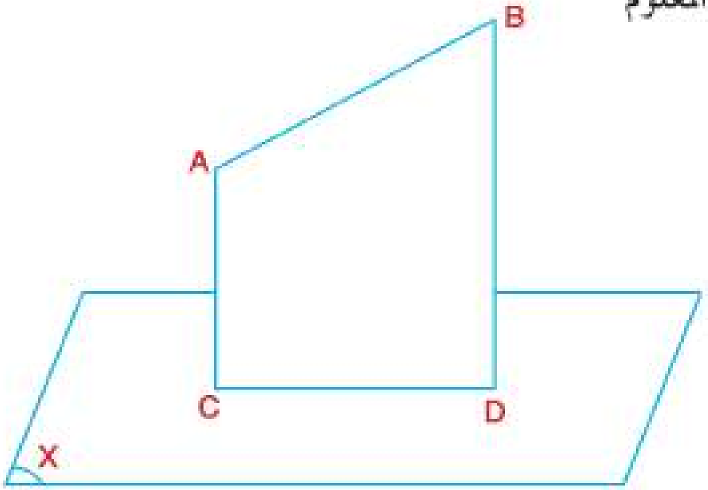
6. دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .

(6-3) الاسقاط العمودي على مستوٍ
The Orthogonal Projection on a Plane

1) **مسقط نقطة على مستوٍ:** هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

2) **مسقط مجموعة نقط على مستوي:** لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

3) **مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم:** هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) وليكن

$\overline{AC} \perp (X)$ ⟸ مسقط A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X)$ ⟸ مسقط B على (X) هو D

∴ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة

اذا كان $\overline{AB} \,//\, (X)$

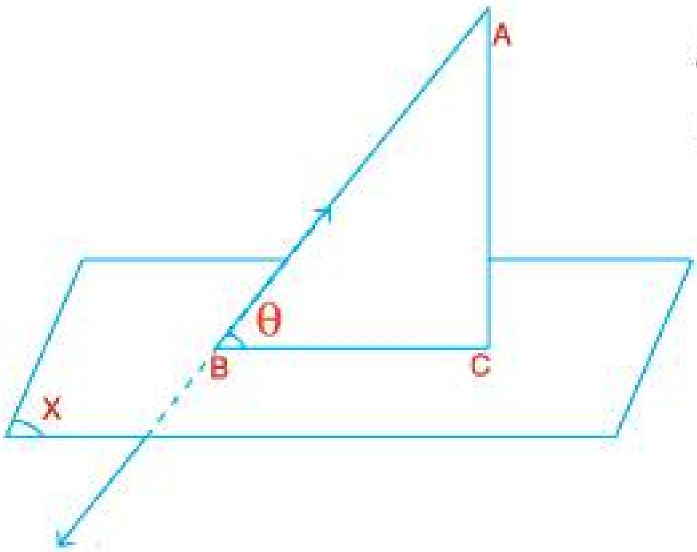
فان $AB = CD$

4) **المستقيم المائل (Inclined Line) على مستوٍ:** هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

5) **زاوية الميل (Angle of Inclination):** هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C



$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\Leftarrow \overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

اي ان $0 < \theta < 90^\circ$

$\theta \in (0, 90^\circ)$

6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فان $\boxed{BC = AB\cos\theta}$

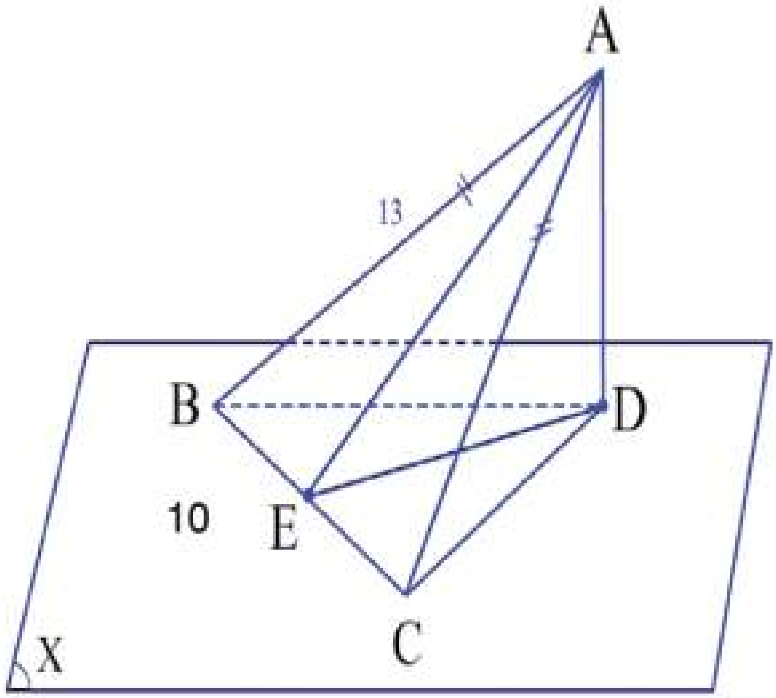
7) مسقط مستوي مائل(Inclined Plane) على (X)

زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة ×جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $\boxed{A' = A.\cos\theta}$

مثال -4-



ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$
والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث
ABC والمستوي (X)
قياسها $60°$ فاذا كان
$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$
جد مسقط المثلث (ABC) على (X)
ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات :

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle$ **ABC** على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ $\triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \angle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12\text{cm}$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6\text{cm}$$

$$\text{BCD مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\text{cm}^2$$

و . هـ . م

ملاحظة

لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالآتي:

مساحة BCD = مساحة $ABC \times \cos 60°$

$$= \frac{1}{2} \times (12 \times 10 \times \frac{1}{2}) = 30\text{cm}^2$$

و . هـ . م

تمارين

1- برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .

2- برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .

3- برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه

4- برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .

5- برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .

6- برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.