2

الفصل الثاني

Chapter Two

Conic Sections القطوع المخروطية

[2-1] تعريف القطع المخروطي.

[2-2] القطع المكافئ.

[2-3] انسحاب المحاور للقطع المكافئ.

[2-4] القطع الناقص.

[2-5] انسحاب المحاور للقطع الناقص.

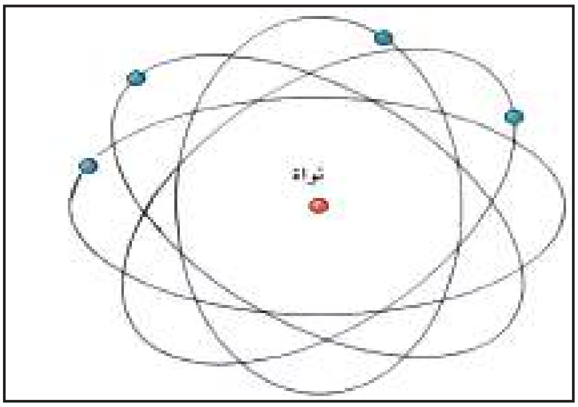
[2-6] القطع الزائد.

[2-7] انسحاب المحاور للقطع الزائد.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
البؤرة قبل الانسحاب	F
البؤرة بعد الانسحاب	$\bar{F}$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}$
العدد الثابت	$2a$

القطوع المخروطية واهمية دراستها :

لنبحث اولاً عن وجود مثل هذه القطوع في الكون والطبيعة سوف ترى الكواكب والنجوم تتحرك على مدارات اهليلجية .(اي المدارات تشبه القطع الناقص) وفي الذرة والالكترون يلاحظ المختصون بان الالكترونات تدور حول النواة على مدارات اهليلجية ايضاً، ومن التطبيقات الاخرى للقطوع المخروطية استخدامها في انتشار الصوت حيث نلاحظها في الات تكبير الصوت الحديثة وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في ضوء السيارة فهو مجسم مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً . عندما ينطلق شعاع ضوئي من المصباح ينعكس هذا الشعاع على السطح المجسم وبصورة افقية. وكذلك جميع الاشعة المنطلقة من المصباح مما يؤدي الى انارة الطريق امام السيارة. ومن التطبيقات الاخرى نلاحظها من خلال الصور التالية :



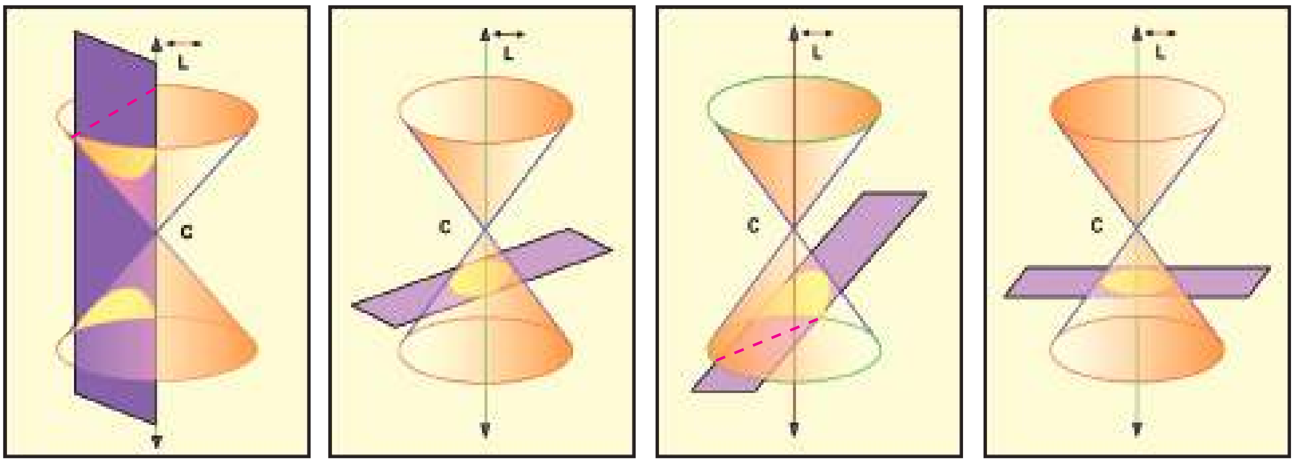
نلاحظ مما سبق مدى اهمية القطوع المخروطية التي اصبحت دراستها محل اهتمام الرياضيين والفلكيين وعلماء الفضاء والميكانيكيين وكان للحضارة العربية الاسلامية دور هام في مواصلة هذه الدراسات بعد اطلاعهم على اعمال الرياضيين الاغريق امثال مينشم ، وابولتيوس ، وبابوس . ومن العلماء العرب الذين اهتموا بالقطوع المخروطية ثابت بن قرة وابو جعفر الخازن ، واباسهل الكوهي ، وابن الهيثم وغيرهم كثيرون .

سبق وتعرفنا في الصف الخامس العلمي على كيفية تولد القطوع المخروطية : الدائرة – القطع المكافئ– القطع الناقص– القطع الزائد . حيث يتم الحصول على هذه القطوع هندسياً وكالاتي :

اذا قطع سطح المخروط الدائري القائم

* بمستوٍ عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى دائرة (**Circle**) .
* بمستوٍ موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافئ "**Parabola**" .
* بمستوٍ غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته فأن القطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الناقص "**Ellipse**".
* بمستوٍ يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الزائد "**Hyperbola**" .

لاحظ الاشكال التالية للقطوع المخروطية :



دائرة　　مكافئ　　ناقص　　زائد

الشكل (2-1)

[2-1] القطع المخروطي:

لتكن (x_1,y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيماً ثابتاً في المستوي نفسه، عندئذ مجموعة كل النقاط التي نسبة بُعد كل منها عن النقطة (x_1, y_1) الى بعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدداً ثابتاً (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي .

مما سبق نلاحظ ان لكل قطع مخروطي (ما عدا الدائرة) ثلاثة مفاهيم اساسية يتعين بها هي:

1- النقطة الثابتة (x_1,y_1) تسمى بؤرة القطع المخروطي **"Focus"** .

2- المستقيم الثابت $ax + by + c = 0$ يسمى دليل القطع المخروطي **"Directrix"**.

3- النسبة (e) تسمى بالاختلاف المركزي **"Eccentricity"**.

ملاحظة

$e = 1$	في القطع المكافئ	«Parabola»
$e < 1$ ، $0 < e < 1$	في القطع الناقص	«Ellipse»
$e > 1$	في القطع الزائد	«Hyperbola»

[2-1-1] المعادلة العامة للقطع المخروطي:

من تعريف القطع المخروطي نستنتج المعادلة العامة وذلك كما يأتي:

لتكن (x, y) نقطة على القطع المخروطي ، عندئذ المسافة بين (x,y) والبؤرة (x_1, y_1) هي :

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

والبعد بين (x , y) والدليل $ax+by+c=0$ هي :

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وبموجب تعريف القطع المخروطي فان النسبة بين هاتين المسافتين تساوي (e) اي ان

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e\ .\ \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على معادلة القطع المخروطي العامة وهي معادلة من الدرجة الثانية

$$\boxed{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2.\ \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}}$$

ملاحظة : سنطبق هذه المعادلة على القطع المكافئ لأنه قد تم تعريف الدليل

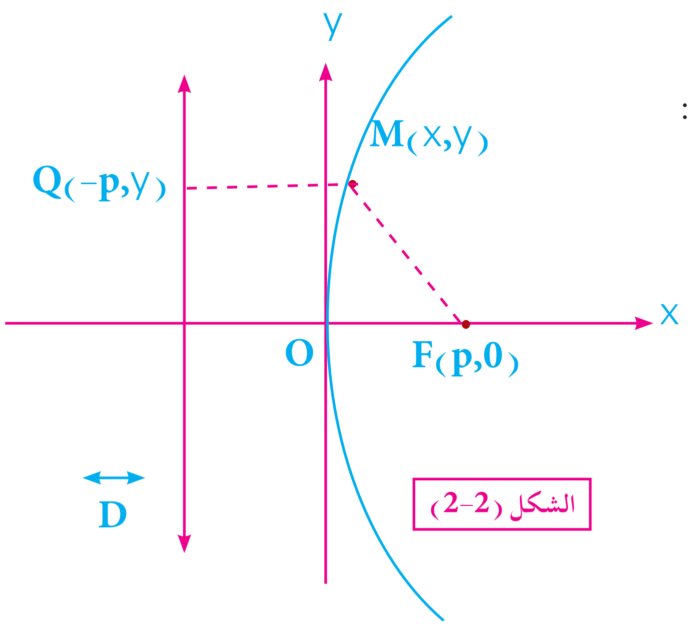
[2-2] القطع المكافئ: Parabola

القطع المكافئ هو مجموعة النقط $M(x , y)$ في المستوي والتي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(p,0)$ تسمى البؤرة حيث $P>0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل لا يحوي البؤرة .

اي ان $MF = MQ$ لاحظ الشكل $(2-2)$:

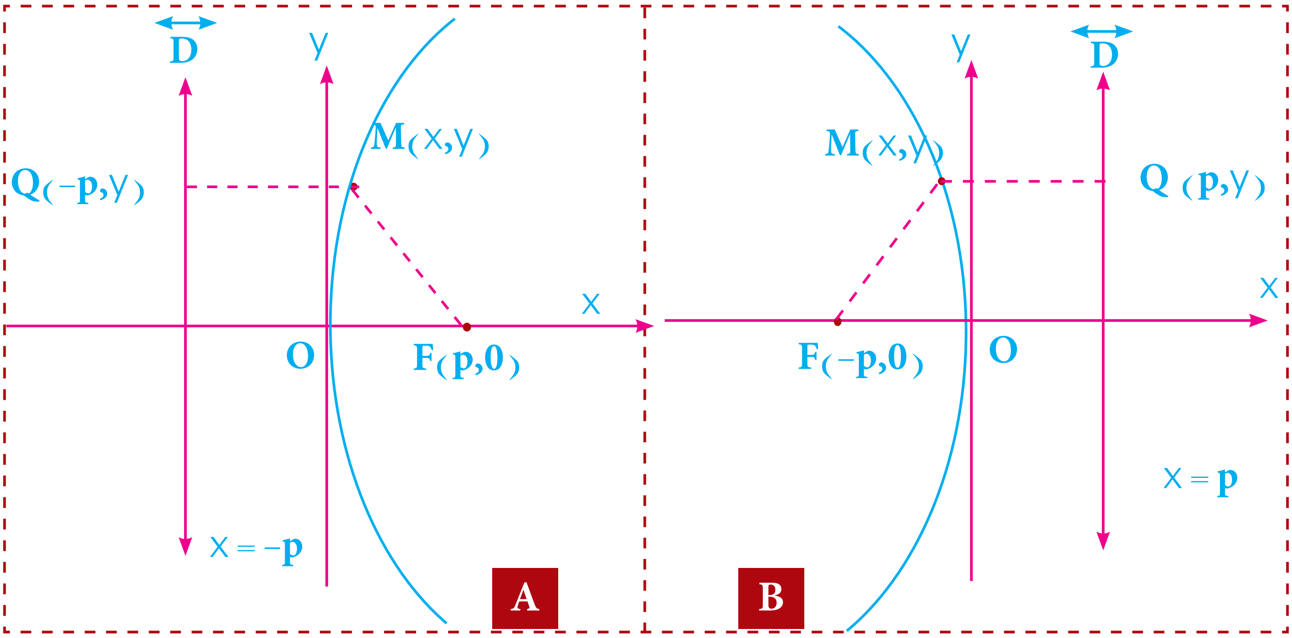
وتسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ "Vertex"

ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ. حيث لاحظ ان $\frac{MF}{MQ}=e=1$



الشكل (2-2)

[2-2-1] معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) والرأس في نقطة الأصل



الشكل (2-3)

في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين وبناءاً على تعريف القطع المكافئ يمكن ايجاد معادلة القطع المكافئ في ابسط صورة ممكنة وكما يأتي :

لتكـن النقطــة F(p,0) هي بؤرة القطـع المكافئ والمستقيــم D هو دليل القطع المكافئ ، والنقطة Q(-p,y) نقطة على الدليل حيث $\overline{MQ}$ عمودي على المستقيم D ، والنقطة M(x,y) من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل (0,0) . كما في الشكل (2-3) (A) . من تعريف القطع المكافئ .

$$MF = MQ$$

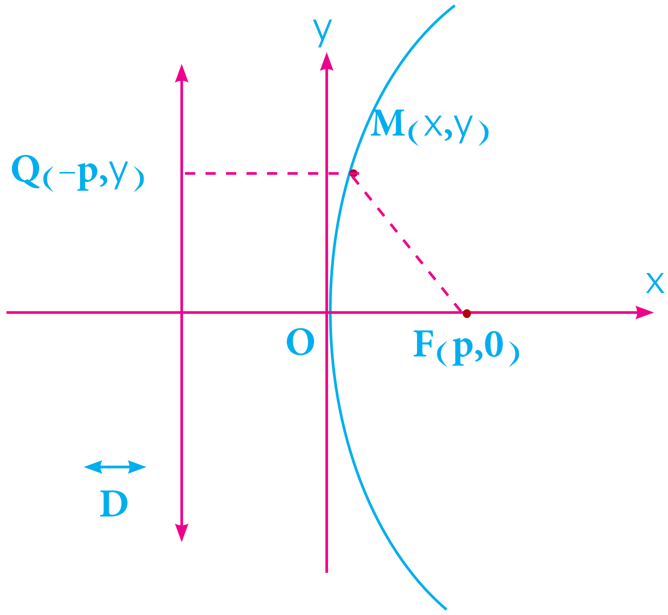
$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين $\sqrt{x^2-2px+p^2+y^2}=\sqrt{x^2+2xp+p^2}$

بالتبسيط $x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2xp+p^2$

(المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات) $\boxed{y^2=4px\ ,\ \forall p>0}$

ومعادلة الدليل $x=-p$



الشكل (2-4)

مثال -1- جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2=-8x$

$y^2=-8x$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2=-4px$

$\Rightarrow 4p=8 \Rightarrow p=\frac{8}{4}=2>0$

$\therefore \boxed{p=2}$

$F(-p,0)=F(-2,0)$

معادلة الدليل $x=p$

$\therefore \boxed{x=2}$

مثال -2-

جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :

أ) بؤرته $(3,0)$ والرأس نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل

أ)

$(p,0) = (3,0)$

$\Rightarrow p = 3$

$\therefore y^2 = 4px$ (المعادلة القياسية)

$\Rightarrow y^2 = (4)(3)x = 12x$

$y^2 = 12x$

ب) من معادلة الدليل

$2x - 6 = 0$

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\therefore p = 3$ (بفضل التعريف)

بتطبيق المعادلة القياسية

$y^2 = -4px$

$y^2 = (-4)(3)x = -12x \Rightarrow y^2 = -12x$

مثال -3-

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه :

الحل

بالمقارنة مع معادلة القطع المكافئ :

$y^2 = 4px$

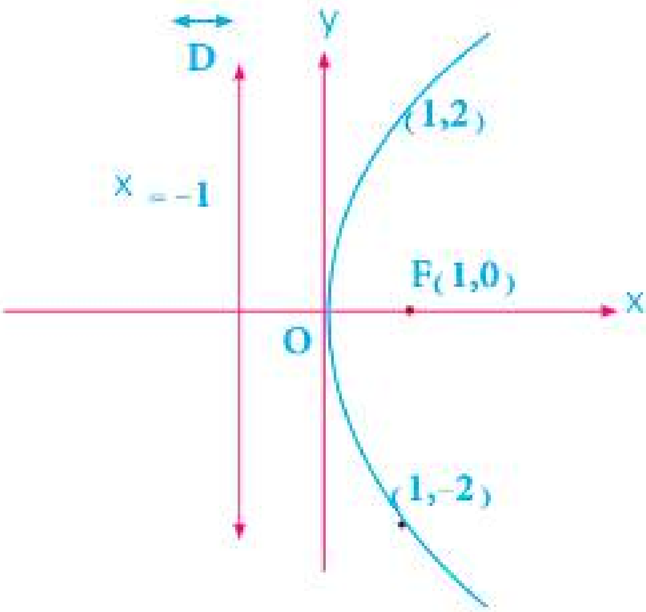
$\Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(1, 0)$ البؤرة

$x = -1$ معادلة الدليل

$y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$

x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$



الشكل (2-5)

مثال -4- باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الأصل.

الحل

البؤرة $F(\sqrt{3},0)$ ، ولتكن النقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ، والنقطة $Q(-\sqrt{3},y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل D ومن تعريف القطع المكافئ.

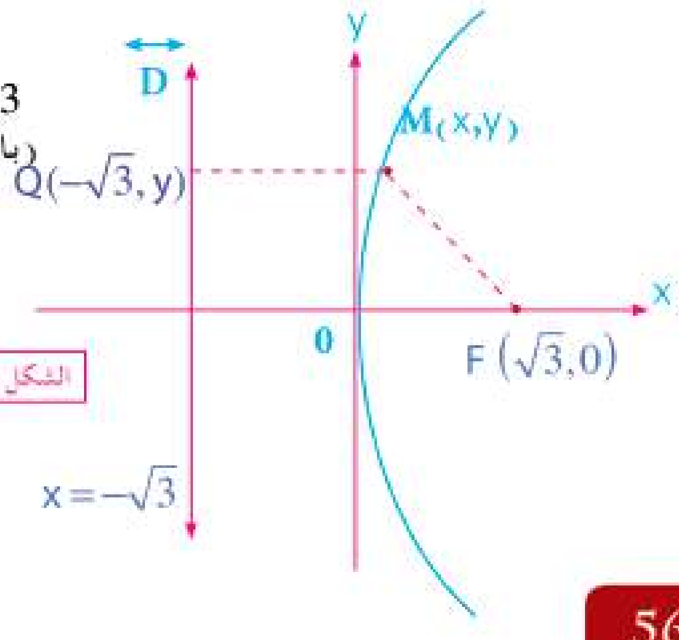
$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$ (بتربيع الطرفين)

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=(x+\sqrt{3})^2$$

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2=x^2+2\sqrt{3}x+3$$ (بالتبسيط)

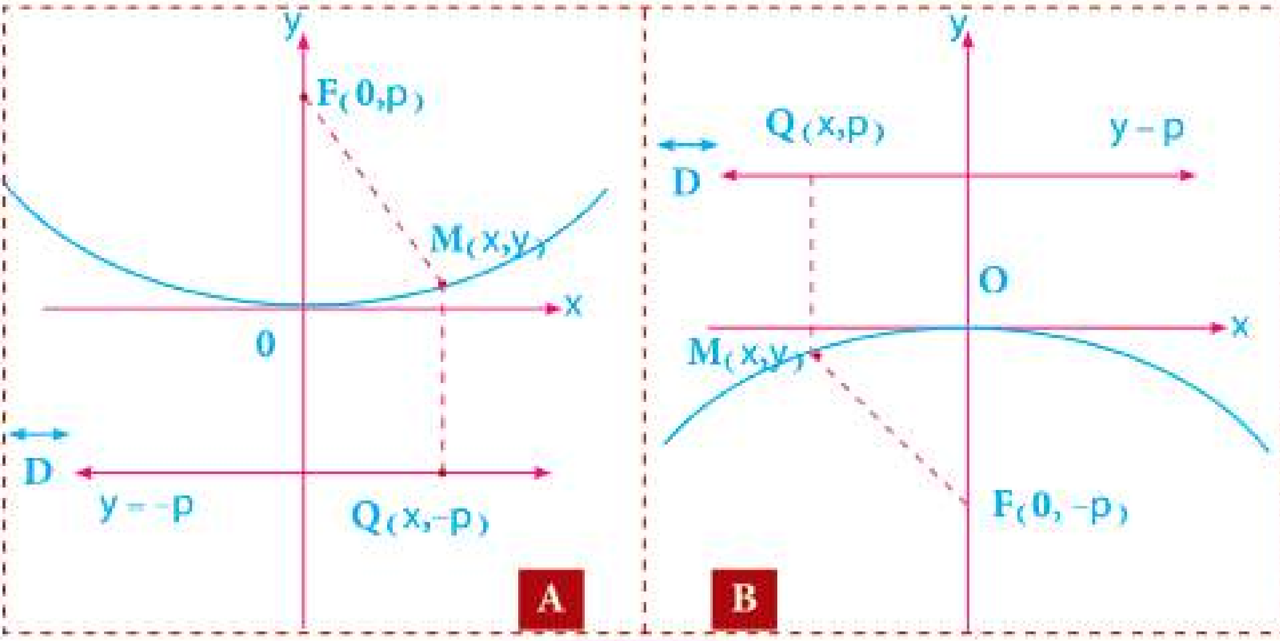
$$y^2=4\sqrt{3}x$$

(معادلة القطع المكافئ)



الشكل (2-6)

[2-2-2] معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y-axis) والرأس في نقطة الأصل



الشكل (2-7)

في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين لتكن النقطة $F(0,p)$ هي بؤرة القطع المكافئ ، والمستقيم D دليل القطع المكافئ والنقطة $Q(x,-p)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل ، والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل $(0, 0)$ كما في الشكل (2-7) A

وبناءاً على تعريف القطع المكافئ فان $MF = MQ$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$ (بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$ (بالتبسيط)

$$x^2 = 2py+2py$$

$$x^2 = 4py \quad , \quad \forall p > 0$$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

الجدول الاتي يمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الاصل حيث $P > 0$

المعادلة	البؤرة	الدليل	المحور	فتحة القطع
$x^2 = 4py$	(0 , p)	y= -p	y- axis	نحو الاعلى
$x^2 = -4py$	(0 , - p)	y = p	y- axis	نحو الاسفل
$y^2 = 4px$	(p , 0)	x = -p	x- axis	نحو اليمين
$y^2 = -4px$	(-p , 0)	x = p	x- axis	نحو اليسار

مثال –5–

جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$.

الحل

$3x^2 - 24y = 0$ [بقسمة طرفي المعادلة على (3)]

$x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$\Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p=2$

ومن قيمة P نجد

$F(0,2)$ البؤرة

$y = -2$ معادلة الدليل

مثال –6–

جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان :–

أ) بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل (أ)

$F(0,5) \Rightarrow p = 5$

$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية

$x^2 = 20y$ (معادلة القطع المكافئ)

الحل (ب)

$y = 7$

$p = 7$

$x^2 = -4py$ (المعادلة القياسية)

$x^2 = -28y$

مثال -7-

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,4) ، (2 , −4) ورأسه نقطة الاصل .

الحل

النقطتان متناظرتان حول المحور السيني .

اذاً المعادلة القياسية

$$y^2 = 4px \quad , \quad \forall p > 0$$

نعوض احدى النقطتين اللتين تحققان المعادلة القياسية ولتكن النقطة (2 ,4)

$$16 = (4)(p)(2)$$

$$16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} \Rightarrow p = 2$$

نعوض $p = 2$ في المعادلة القياسية

$$y^2 = (4)(2)x$$

$$y^2 = 8x$$

معادلة القطع المكافئ

مثال -8-

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة (3 ,−5)

الحل

يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

اولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$x^2 = 4py$

$y = -5$ معادلة الدليل

$p = 5$

$x^2 = 4py$

$x^2 = 20y$

ثانياً : البؤرة تنتمي لمحور السينات

$y^2 = 4px$

$x = 3$ معادلة الدليل

$p = 3$

$y^2 = -4px$ (المعادلة القياسية)

$y^2 = -12x$

[2-3] إنسحاب المحاور للقطع المكافئ :

[2-3-1] المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الأحداثيين ورأسه النقطة (h,k)

في البنود السابقة تعرفنا على المعادلتين القياسيتين للقطع المكافئ وهما :

$$y^2 = 4px \;.......(1)$$

$$x^2 = 4py \;.......(2)$$

المعادلة الاولى : هي معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل $(0,0)$.

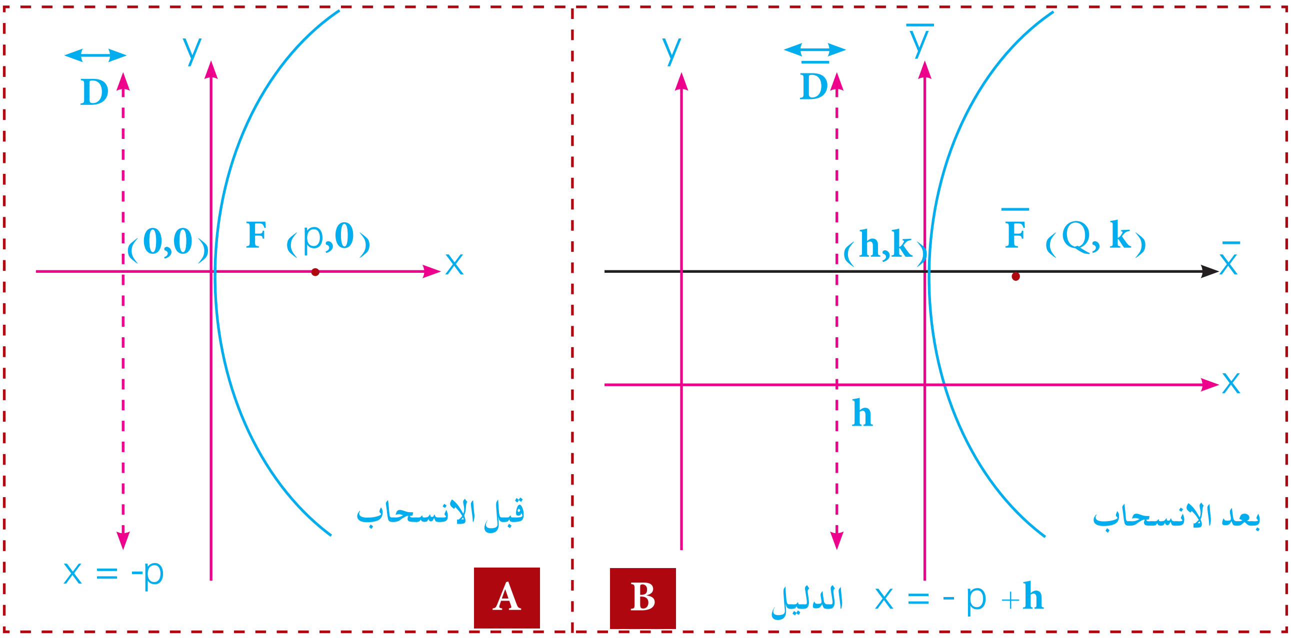
المعادلة الثانية : معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور الصادات ورأسه نقطة الاصل $(0,0)$.

فاذا كان الرأس هو النقطة (h,k) $\overline{O}$ فان المعادلتين القياسيتين هما :

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \;...... (3)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \;...... (4)$$

المعادلة الثالثة : تمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h,k) $\overline{O}$ ومحوره يوازي محور السينات . لاحظ في الشكل $(8-2)$ الانسحاب لمكونات القطع المكافئ .



الشكل (8-2)

انسحاب $O(0,0) \longrightarrow \overline{O}(h,k)$

انسحاب $F(p,0) \longrightarrow \overline{F}(p+h,k)$

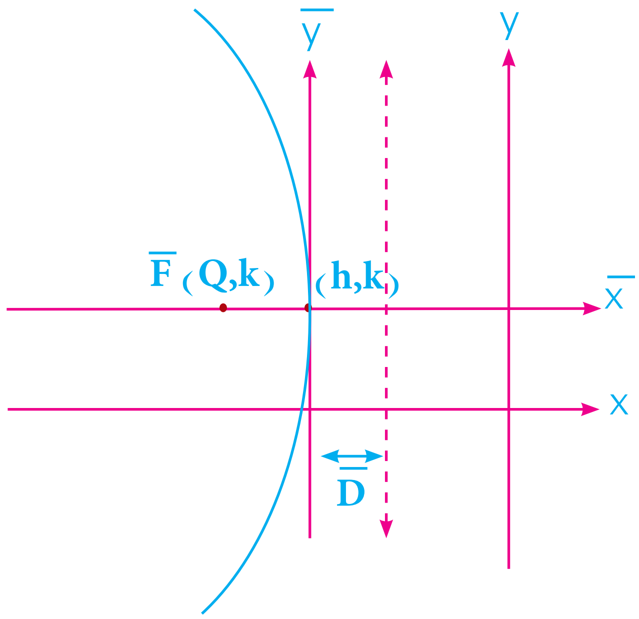
انسحاب $x=-p \longrightarrow x=-p+h$

معادلة المحور $y=k$

حيث (p) في المعادلة (3) ، (4) هو البعد البؤري للقطع المكافئ ويساوي المسافة بين الرأس $\overline{O}$ والبؤرة $\overline{F}$ ويساوي البعد بين الرأس ومعادلة الدليل اي ان : $P=|Q-h|$

ويمكن ان تكون فتحة القطع المكافئ بالاتجاه السالب لمحور السينات كما في الشكل (2 − 9) :

$(y-k)^2=-4p(x-h)$	
$(Q,k)=(h-p,k)$	البؤرة
$x=p+h$	معادلة الدليل
$y=k$	معادلة المحور



الشكل (9−2)

ملاحظة في البند [3 − 2] (انسحاب المحاور) سنكتفي فقط في ايجاد بؤرة ورأس القطع المكافئ ومعادلة الدليل ومعادلة المحور.

مثال -9- من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2=4(x-2)$

عين الرأس ، البؤرة ، معادلة المحور ، معادلة الدليل .

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ. $(y+1)^2=4(x-2)$

$(y-k)^2=4p(x-h)$

$\Rightarrow\ h=2\ ,\ k=-1$

$\therefore\ (h,k)=(2,-1)$ (الرأس)

$4p=4$

$\Rightarrow\ p=1$

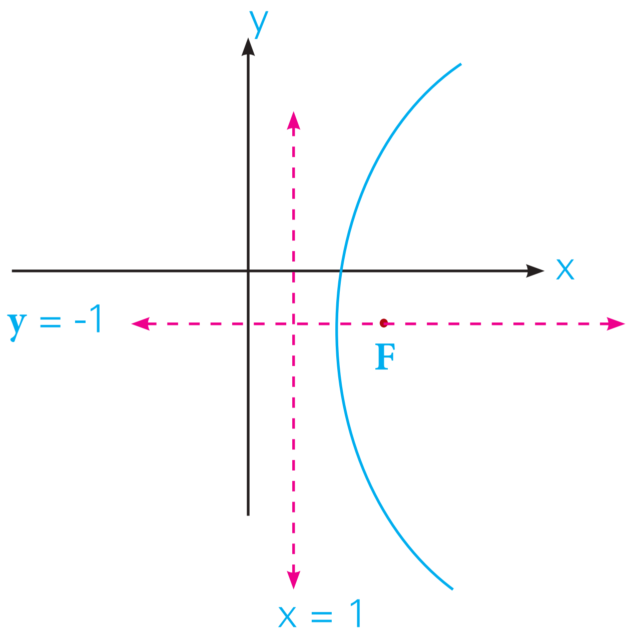
$\therefore\ F(p+h,k)=F(1+2,-1)=F(3,-1)$ (البؤرة)

$y=k$ معادلة المحور

$\therefore\ y=-1$

$x=-p+h$

$x=-1+2=1\Rightarrow\ x=1$ معادلة الدليل



المعادلة الرابعة : تمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ راسه النقطة (h , k) ومحوره يوازي المحور الصادي لاحظ الانسحاب لمكونات القطع المكافئ . كما في الشكل $(2 - 10)$.

انسحاب $O\,(0,0) \longleftarrow \overline{O}(h,k)$ الراس بعد الانسحاب

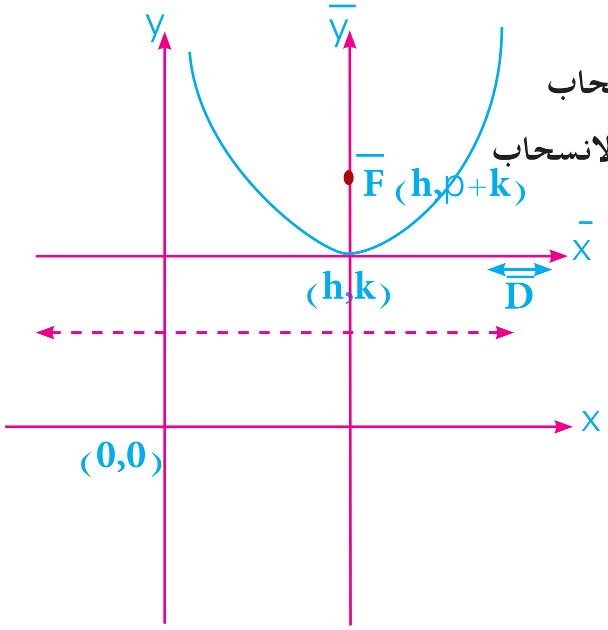
انسحاب $F\,(0,p) \longleftarrow \overline{F}(h, Q)$ البؤرة بعد الانسحاب

$Q = p + k$

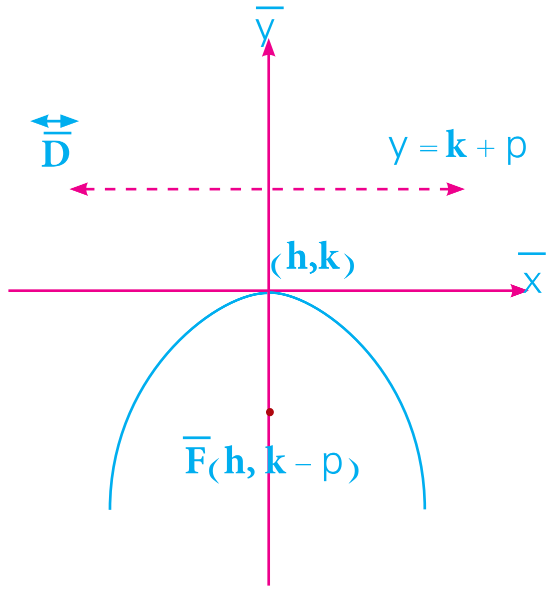
$\Rightarrow \quad p = |Q - k|$ (البعد البؤري)

$x = h$ معادلة المحور

معادلة الدليل $y = k - p$



الشكل (2-10)



الشكل (2-11)

$(x - h)^2 = -4p(y - k)$	
$(h , k - p)$	البؤرة
$y = k + p$	معادلة الدليل
$x = h$	معادلة المحور

مثال -10-

ناقش القطع المكافئ: $y = x^2 + 4x$

الحل

نضيف 4 الى طرفي المعادلة حتى نضع حدود x في شكل مربع كامل ، فنكتب:

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$y + 4 = (x+2)^2$$

هذه المعادلة من الشكل:

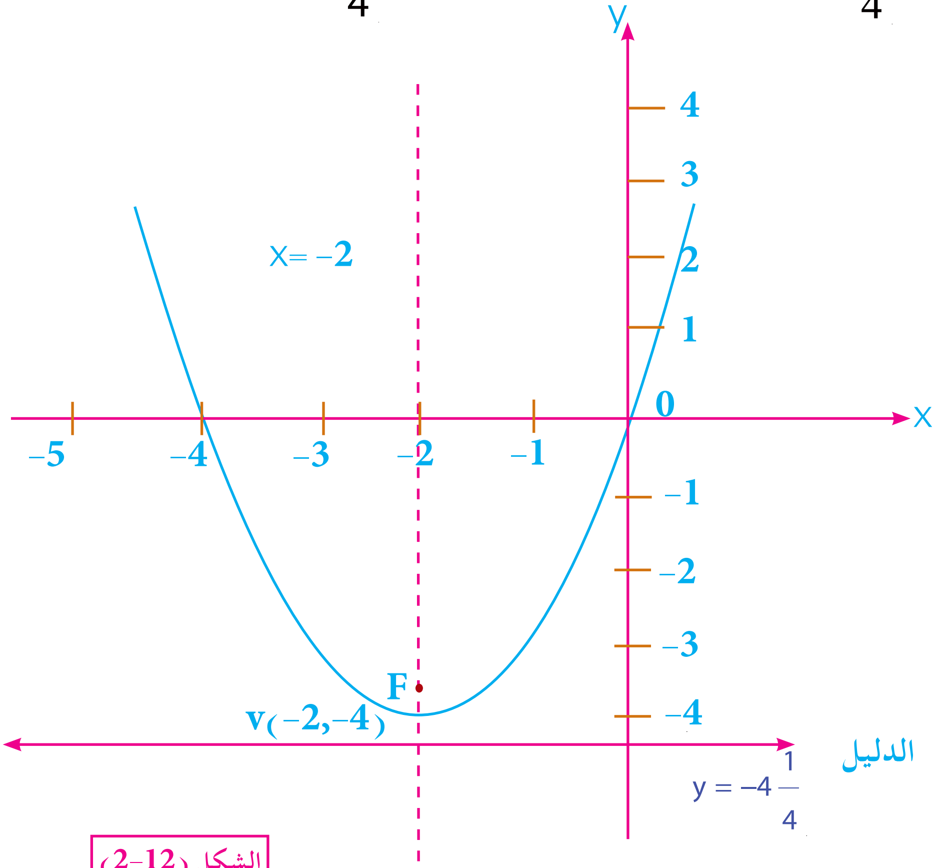
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

حيث

$h = -2\ ,\ k = -4 \Rightarrow$ الرأس $(-2, -4)$

$$4p = 1\ ,\ p = \frac{1}{4}$$

هذا القطع المكافئ مفتوح الى الاعلى لان من اجل قيم x الحقيقية ولقيم $y \geq -4$ وراسه $v(-2,-4)$ تقع البؤرة على بعد $\frac{1}{4}$ وحدة من رأس القطع ونحو الاعلى ،اي عند $F(-2,-3\frac{3}{4})$ وان الدليل موازٍ للمحور x ويبعد $4\frac{1}{4}$ وحدة من المحور x . ومعادلته هي $y = -4\frac{1}{4}$.



الشكل (2-12)

تمارين

1 . جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها .

أ- البؤرة $(5, 0)$ والرأس نقطة الاصل .

ب- البؤرة $(0, -4)$ والرأس نقطة الاصل .

ج- البؤرة $(0, \sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل .

د- معادلة دليل القطع المكافئ $4y - 3 = 0$ والرأس نقطة الاصل .

2 . في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :-

a) $x^2 = 4y$ b) $2x + 16y^2 = 0$ c) $y^2 = -4(x-2)$

d) $(x-1)^2 = 8(y-1)$ e) $y^2 + 4y + 2x = -6$ f) $x^2 + 6x - y = 0$

3 . جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(-2, -5)$ ، $(2, -5)$ والراس في نقطة الاصل .

4 . اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3, 4)$ والرأس في نقطة الاصل جد معادلته علماً ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

5 . قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة $(1, 2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله و أرسم القطع .

6 . باستخدام التعريف . جد معادلة القطع المكافئ

أ- البؤرة $(7, 0)$ والرأس نقطة الاصل .

ب- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$. والرأس نقطة الاصل .

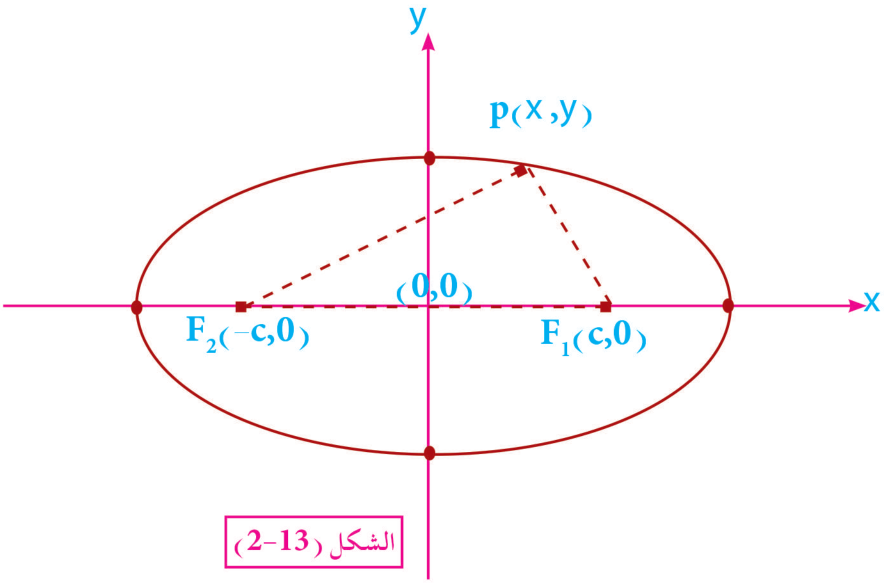
[2-4] القطع الناقص Ellipse:

تعريف [2-4-1]

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت.

[2-4-2] قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

كما في الشكل (2 - 13)



الشكل (2-13)

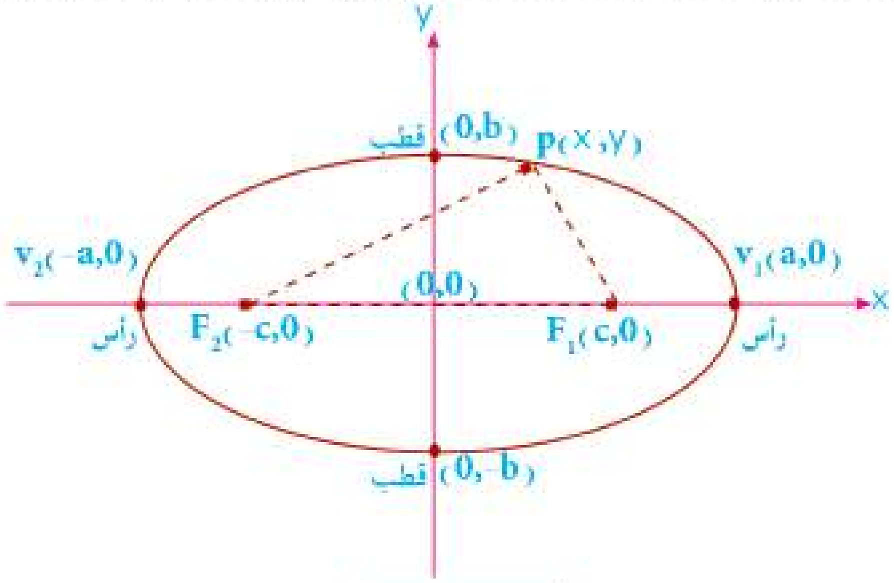
بؤرتا القطع الناقص هما $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ والعدد الثابت هو $2a$, $a > 0$, $c > 0$

تسمى النقطة التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع الناقص (Center)، ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري (Focal axis) ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسا القطع وتسمى قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين بالمحور الكبير (Major axis) وطولها (2a) ايضاً ويساوي مجموع بعدي اي نقطة $P(x, y)$ من نقاط القطع الناقص عن البؤرتين اي ان :

$$\boxed{pF_1 + pF_2 = 2a}$$

وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع المستقيم العمود على المحور الكبير من مركز القطع الناقص

مع القطع الناقص بالمحور الصغير (Minor axis) وطولها (2b) حيث b>0 ونهايتاه تسميان القطبين.



الشكل (2-14)

[3-4-2] معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

لاحظ الشكل (2 - 14)

$\because \quad PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+y^2$$

(بقسمة طرفي المعادلة على 4)

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2\left[x^2+2cx+c^2+y^2\right]=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

بالتبسيط

$$a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4+\cancel{2a^2cx}+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\boxed{x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)}\text{..........(1)}$$

بما ان $c < a$ دائماً فان $a^2 - c^2 > 0$ وبفرض ان $b^2 = a^2 - c^2$ حيث $b > 0$

نعوض 2 في 1

$$\Rightarrow \boxed{b^2 = a^2 - c^2} \ldots\ldots\ldots(2)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $a^2\ b^2$

$$\Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

تمثل المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

وتسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزي.

أي ان $e = \frac{c}{a}$ ويكون دائماً اقل من الواحد.

[2-4-3] معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان تنتميان لمحور الصادات.

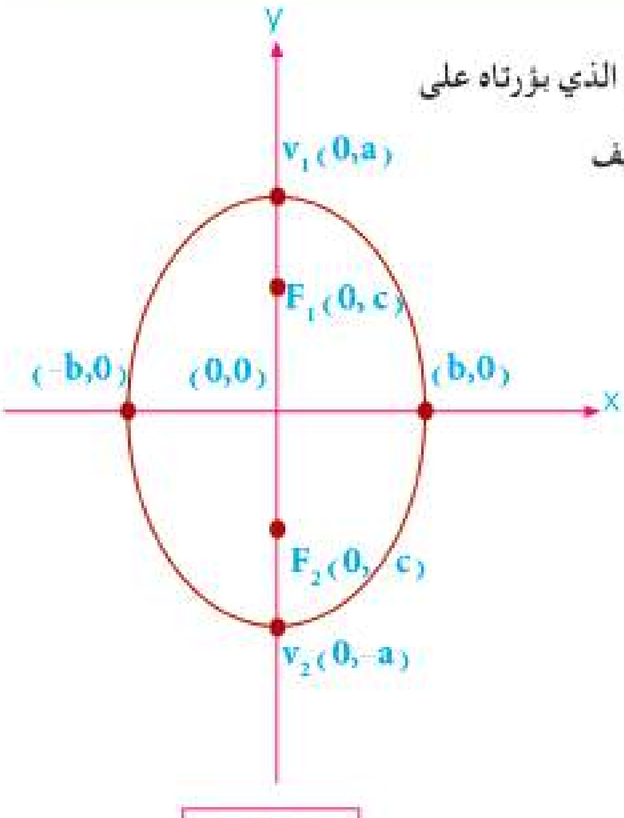
لاحظ الشكل (2 - 15)

بنفس خطوات الاشتقاق السابق لمعادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل وباستخدام التعريف

نحصل على المعادلة: $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

حيث البؤرتان على محور الصادات والمركز في نقطة الاصل.

نلخص ما سبق بالآتي:



الشكل (2-15)

قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .	قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .
المعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$	2) $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$
الرأسان $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$	3) $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

4) $c=\sqrt{a^2-b^2}$

5) $a>c$, $a>b$

6) $2a$ = طول المحور الكبير

7) $2b$ = طول المحور الصغير

8) $2c$ = المسافة بين البؤرتين

9) $A=ab\pi$: مساحة منطقة القطع الناقص ويرمز لها A (Area)

10) $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\pi=\frac{22}{7}$ محيط القطع الناقص ويرمز له P (Perimeter)

11) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, "e" الاختلاف المركزي ويكون دائماً اقل من الواحد $(e<1)$

مثال -11- في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي .

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2) $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

الحل (1) بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث $a > b$.

طول المحور الكبير $\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة

طول المحور الصغير $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$ وحدة

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

$$\therefore c=3$$

البؤرتان $\therefore F_1(3,0) \;,\; F_2(-3,0)$

الرأسان $V_1(5,0) \;,\; V_2(-5,0)$

(الاختلاف المركزي) $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5} < 1$

الحل (2) بضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{3}{4}$

$$4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$$

$$3x^2+\frac{9y^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

طول المحور الكبير $\Rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow 2a=\frac{4}{3}$ وحدة

طول المحور الصغير $b^2=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2b=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

البؤرتان $F_1\left(0,\frac{1}{3}\right) \;,\; F_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

الرأسان $V_1\left(0,\frac{2}{3}\right) \;,\; V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

(الاختلاف المركزي) $\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2} < 1$

مثال -12-

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل

البؤرتان والرأسان يقعان على محور السينات والمركز في نقطة الاصل :

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$$

$$\Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

مثال -13-

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله 12 وحدة، ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه.

الحل

$$2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$$

$$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$$

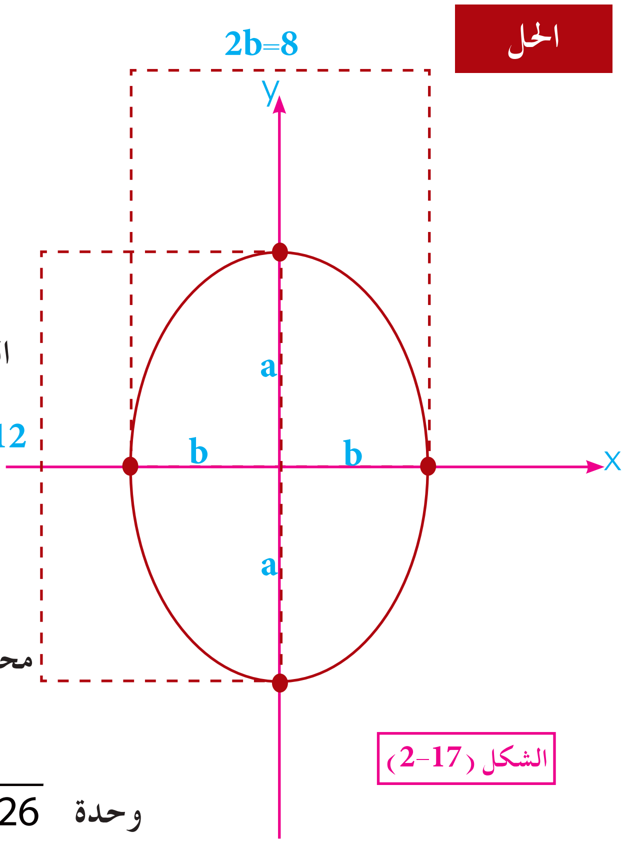
المسافة بين البؤرتين $\Rightarrow 2c=4\sqrt{5}$ وحدة

مساحة منطقة القطع الناقص $\boxed{A=ab\pi}$

$A=(6)(4)\pi=24\pi$ (وحدة مربعة)، $\pi=\frac{22}{7}$

محيط القطع الناقص $\boxed{\because P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$

$P=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}=2\pi\sqrt{26}$ وحدة



الشكل (2-17)

مثال -14-

لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $K \in R$.

الحل

$kx^2 + 4y^2 = 36 \qquad [\div 36]$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

من البؤرة $(\sqrt{3},0)$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$$

وبالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{k} \quad , \quad b^2 = 9 \ , \ c^2 = 3 \ \ldots\ldots (1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \ \ldots\ldots (2)$$

بالتعويض عن (1) في (2)

$$3 = \frac{36}{k} - 9 \Rightarrow k = 3$$

مثال -15-

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات ، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

الحل

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$2a - 2b = 2 \qquad \div 2$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \ \ldots\ldots (1)$$

$$\because \ c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore \ 9 = (1+b)^2 - b^2 \qquad \text{بالتعويض}$$

$$9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$$

$$9 = 1 + 2b$$

$$b = 4 \ \ldots\ldots (2)$$

تعويض (2) في (1)

$a = 1 + 4 = 5$

$a^2 = 25$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

مثال -16-

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$, وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل

$y^2 - 12x = 0$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية)

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

بؤرتا القطع الناقص هما : $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

$\Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$2b = 10$

$b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$\because c^2 = a^2 - 25$

$\therefore 9 = a^2 - 25$

$a^2 = 34$

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$ معادلة القطع الناقص

مثال -17-

باستخدام التعريف ، جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه :

$F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت = 6

الحل

$\forall P(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص :

$$\Rightarrow PF_1+PF_2=2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-2)^2+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$$

$$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2}=36+8x$$ بالقسمة على 4

$$3\sqrt{(x+2)^2+y^2}=9+2x$$ بتربيع الطرفين

$$9\left[x^2+4x+4+y^2\right]=81+36x+4x^2$$

$$9x^2+36x+36+9y^2=81+36x+4x^2$$

$$5x^2+9y^2=81-36$$

$$5x^2+9y^2=45$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$ معادلة القطع الناقص

[2-4-5] طريقة رسم القطع الناقص Graph The Ellipse.

لتكن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع :

1. نعين النقطتين $V_2(-a,0)$, $V_1(a,0)$
2. نعين النقطتين $M_2(0,-b)$, $M_1(0,b)$
3. نصل بين النقاط الاربعة $V_1\ M_1\ V_2\ M_2$ على الترتيب بمنحني متصل.
4. نعين البؤرتين $F_2(-c,0)$, $F_1(c,0)$

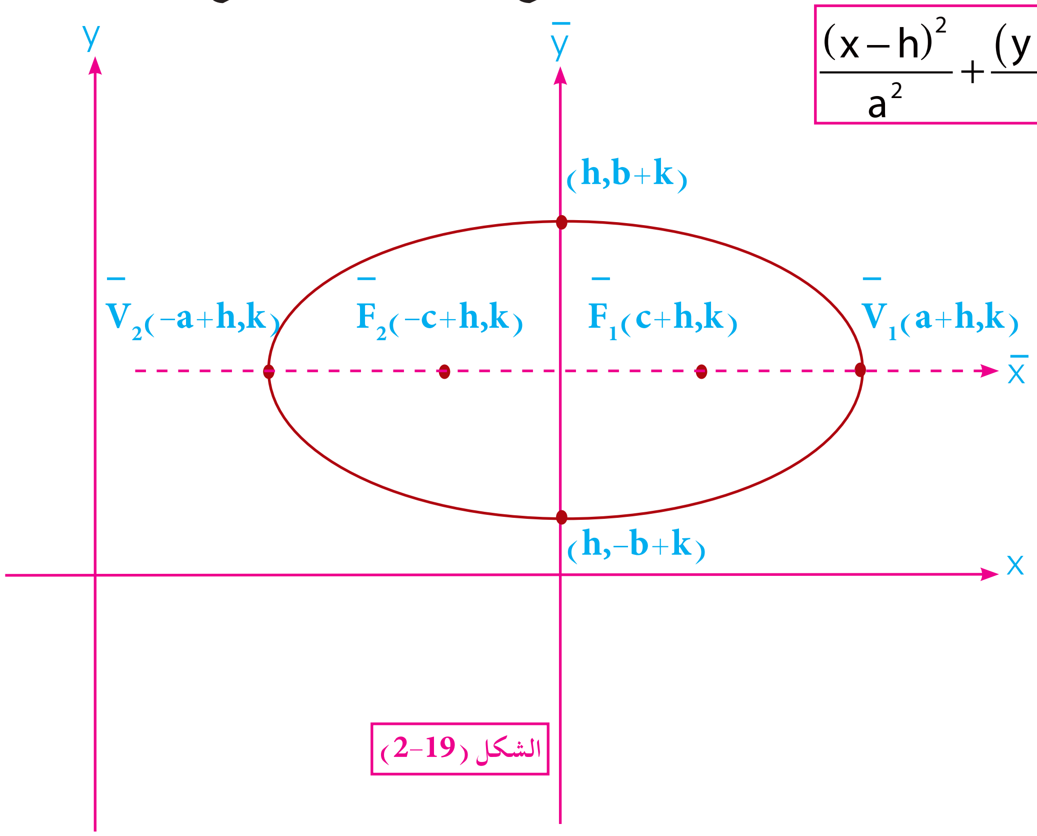
[2-5] انسحاب المحاور للقطع الناقص.

تبينا ان مركز القطع الناقص بانه نقطة تقاطع محوري تناظره ، فاذا كان المركز عند النقطة $c(h,k)$ والمحوران يوازيان المحورين الاحداثيين فاننا نحصل على معادلة القطع الناقص في الاحداثيات الجديدة كما يأتي :

[2-5-1] المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h, k) .

عند انسحاب مركز القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل $(0,0)$ على محور السينات بمقدار h من الوحدات وبمقدار k من الوحدات على محور الصادات ، تصبح المعادلة القياسية للقطع الناقص بالصورة الاتية :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$



الشكل (2-19)

لاحظ من الشكل (2 - 19) ان المحور الكبير يوازي محور السينات وطوله (2a) ومعادلته $y=k$ والمحور الصغير يوازي محور الصادات وطوله (2b) ومعادلته $x=h$ اما البؤرتان بعد الانسحاب فتصبحان $\bar{F}_2(-c+h,k)$, $\bar{F}_1(c+h,k)$ والرأسان للقطع الناقص هما $\bar{V}_2(-a+h,k)$, $\bar{V}_1(a+h,k)$

[2-5-2] المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور الصادات ومركزه النقطة (h, k).

بنفس الاسلوب السابق لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور السينات ومركزه النقطة (h,k) يمكن التعرف على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور الصادات ومركزه النقطة (h,k) وهي :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

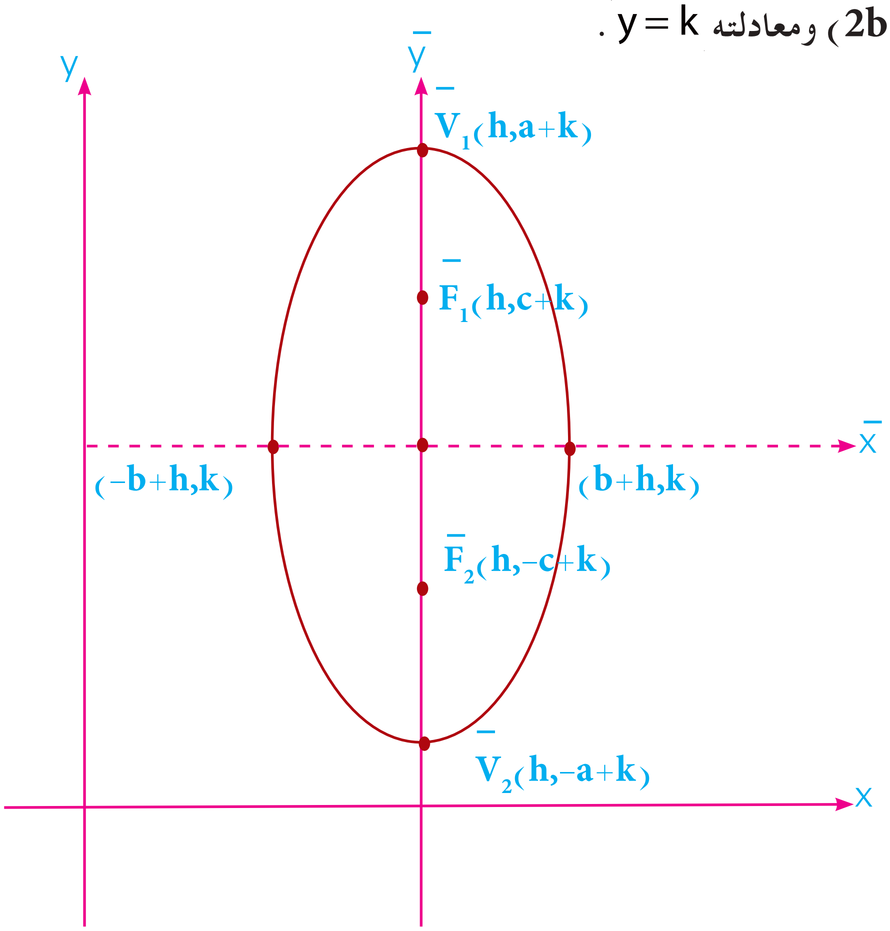
لاحظ الشكل (2 - 20)

حيث البؤرتان هما $F_1(h, c+k)$, $F_2(h, -c+k)$

والرأسان $V_1(h, a+k)$, $V_2(h, -a+k)$

والمحور الكبير يوازي محور الصادات وطوله (2a)

ومعادلته $x=h$ اما المحور الصغير فانه يوازي محور السينات وطوله (2b) ومعادلته $y=k$.



الشكل (2-20)

ملاحظة

سنقتصر في البند [5 - 2] على إيجاد مركز القطع الناقص، والبؤرتان والرأسان والقطبان، وطول المحورين ومعادلة كل من المحورين فقط.

مثال -18- جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص ثم جد قيمة **e** .

$$\frac{(X-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص .

$$\frac{(X-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$\Rightarrow (h,k)=(2,1)$

$\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة طول المحور الكبير

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ وحدة طول المحور الصغير

$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ $(-b+h,k)$, $(b+h,k)$ القطبان

$\overline{F_1}(h,c+k)$, $\overline{F_2}(h,-c+k)$ البؤرتان $(-1,1)$, $(5,1)$

$\overline{F_1}(2,5)$, $\overline{F_2}(2,-3)$

$\overline{V_1}(h,a+k)$, $\overline{V_2}(h,-a+k)$ الرأسان

$\overline{V_1}(2,6)$, $\overline{V_2}(2,-4)$

$\therefore x=2$ معادلة المحور الكبير

$y=1$ معادلة المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$ (الاختلاف المركزي)

تمارين

1 . عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي :

a) $x^2+2y^2=1$　　b) $9x^2+13y^2=117$

c) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$　　d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

e) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$　　f) $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

2 . جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل في كل مما يأتي ثم أرسمه :

أ . البؤرتان هما النقطتان (5 ,0) و (5- ,0) وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة .

ب . البؤرتان هما (±2 ,0) ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm4$.

جـ . احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 وحدة على الترتيب .

د . الاختلاف المركزي = $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية .

هـ . المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ، ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة .

3 . باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

أ . بؤرتاه النقطتان $(0,\pm2)$ ورأساه النقطتان $(0,\pm3)$ ومركزه نقطة الاصل .

ب . المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

4 . جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً بان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3})$.

5. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2)$, $(3,4)$.

6. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

7. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

8. قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) ، واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h,k\in R$؟

9. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

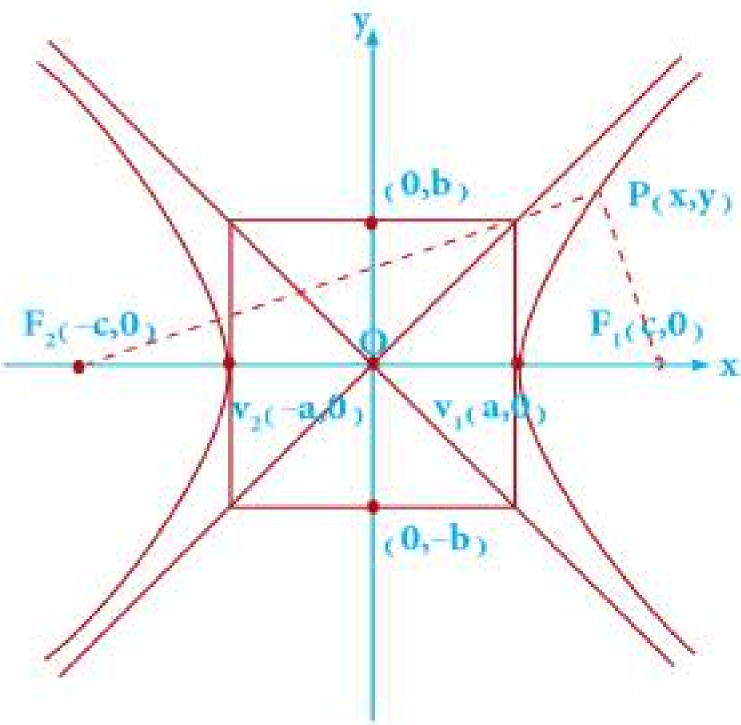
10. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$، $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.

[2-6] القطع الزائد Hyperbola .

تعـــريـف [2-6-1]

القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً .

كما في الشكل (2 - 22)



الشكل (2-22)

البؤرتان هما $F_1\ (c\,,0)\ ,\ F_2(-c,0)$

الرأسان هما $V_1\ (a\,,0)\ ,\ V_2(-a,0)$

والنقطة $P(x,y)$ نقطة من نقاط منحني القطع الزائد ومن التعريف [2 - 6]

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

حيث 2a عدداً ثابتاً يمثل طول المحور الحقيقي للقطع الزائد الذي تقع عليه البؤرتين والرأسين وكل من $pF_1\ ,\ pF_2$ يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة (p) والمسافة $F_1\,F_2$ هي البعد بين البؤرتين وتساوي 2c وطول المحور المرافق او التخيلي هو (2b) (وهو المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع) .

[2-6-2] معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

من الشكل (22 - 2) وتبعاً لتعريف القطع الزائد :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين والتبسيط كما مر في معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان على محور السينات نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$

من الشكل (22 - 2) فان : $c > 0 \,,\, a > 0 \,,\, c > a$

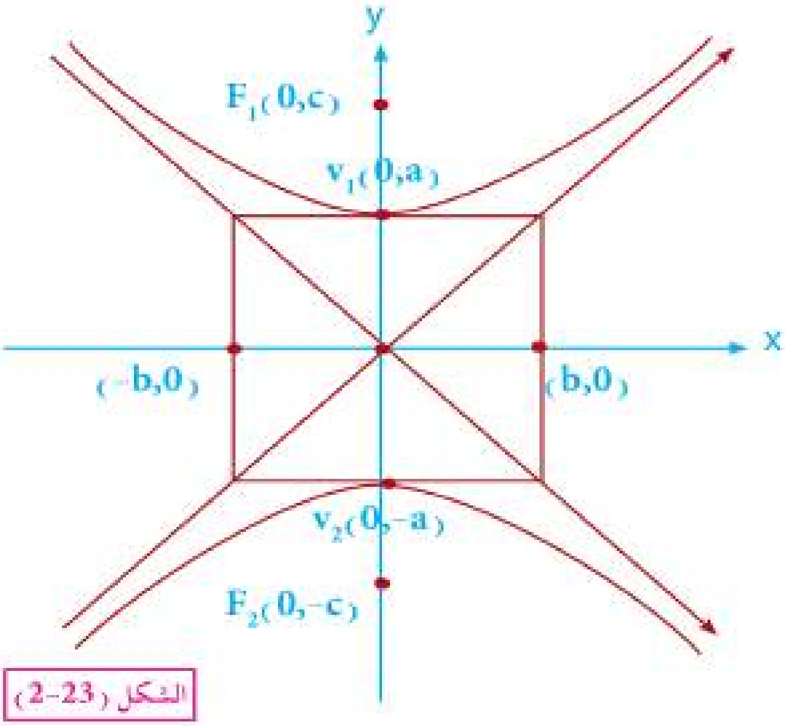
$c^2 - a^2 > 0$

وبفرض ان $b^2 = c^2 - a^2$

وبتعويض عن $a^2 - c^2 = -b^2$ في المعادلة القياسية السابقة نحصل على :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

[3-6-2] معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .



الشكل (23-2)

اذا كانت البؤرتان على محور الصادات ومحورالسينات هو العمود على F_1F_2 من نقطة الاصل كما في الشكل (23 - 2) وبنفس الطريقة السابقة نجد المعادلة القياسية للقطع الزائد .

وهي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظة

الاختلاف المركزي e للقطع الزائد يكون أكبر من واحد أي

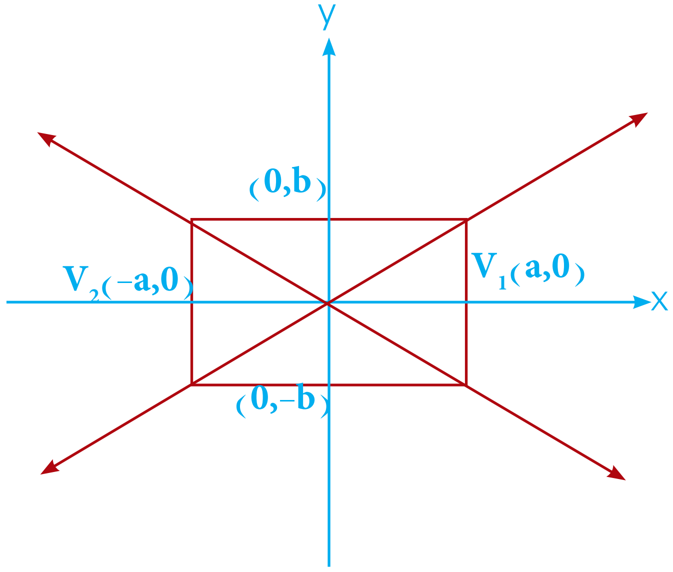
$$\boxed{e = \frac{c}{a} > 1}$$

[4-6-2] طريقة رسم القطع الزائد Graph The Hyperbola .

لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع :

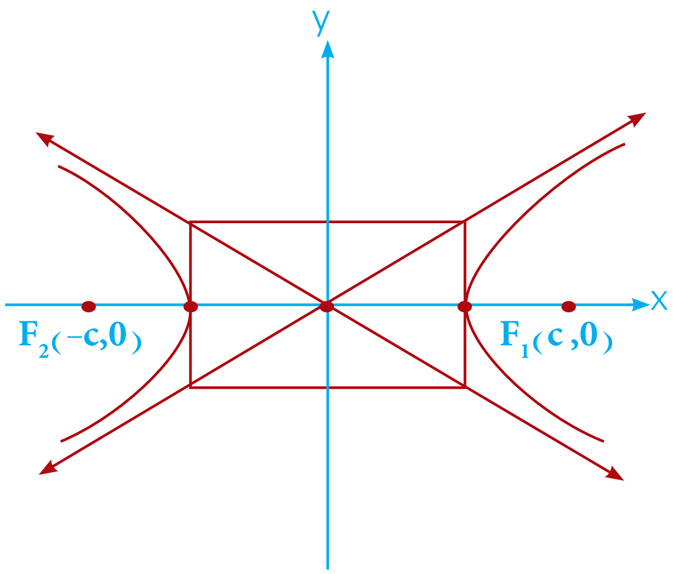
1. نعين النقطتين $(a, 0)$, $(-a, 0)$.
2. نعين النقطتين $(0, b)$, $(0, -b)$.
3. نكون مستطيلاً من هذه النقط أضلاعه توازي المحورين كما في الشكل (24 - 2) .

4. نرسم قطـــري المستطيـــل كما في الشكل (2 - 24) فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطـع الزائد .



الشكل (2-24)

5. نعين البؤرتين $F_2(-c,0)$, $F_1(c,0)$ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد كما في الشكل (2 - 25) .



الشكل (2-25)

مثال -19-

عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم أرسمه.

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الحقيقي $\Rightarrow a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$ وحدة

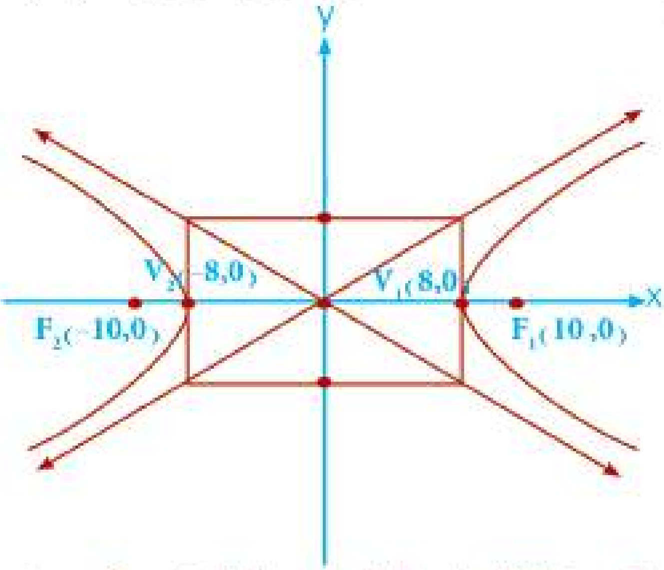
طول المحور المرافق $\Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$ وحدة

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36$$

$$\Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$$

رأسا القطع الزائد هما $V_1(8,0)\ ,\ V_2(-8,0)$

والبؤرتان هما $F_1(10,0)\ ,\ F_2(-10,0)$



الشكل (2-26)

مثال -20-

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات.

الحل

$$2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$$

$$\therefore e=\frac{c}{a} \Rightarrow 2=\frac{c}{3} \Rightarrow c=6$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 36=9+b^2$$

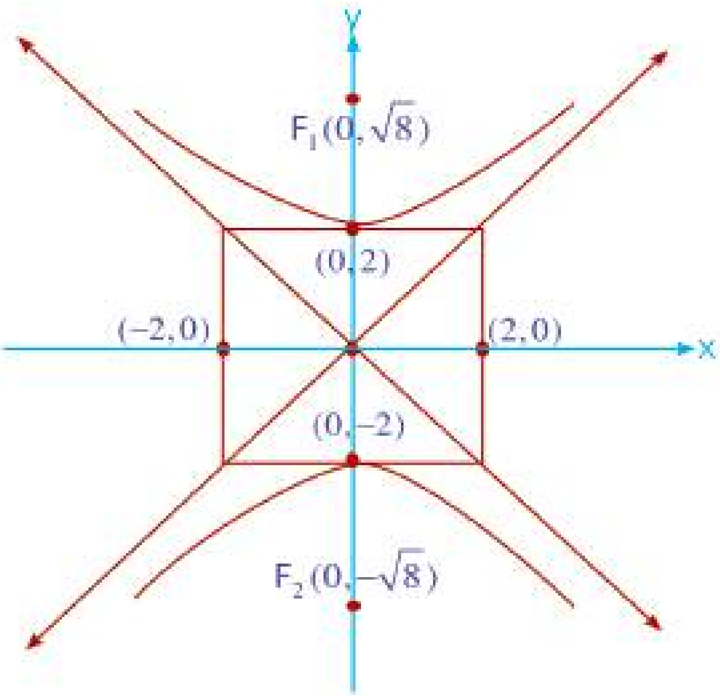
$$\Rightarrow b^2=36-9 \Rightarrow b^2=27$$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد القياسية

مثال -21- جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان : $F_1(0,\sqrt{8})$, $F_2(0,-\sqrt{8})$

الحل بما ان البؤرتين على محور الصادات فمعادلته القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$$2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$$
$$c=\sqrt{8} \Rightarrow c^2=8$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$\therefore 8=a^2+4$$
$$a^2=4$$
$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$$



الشكل (2-27)

في هذا المثال طول المحور الحقيقي مساوٍ الى طول المحور المرافق مثل هذا النوع من القطوع الزائدة يدعى بالقطع الزائد القائم او (المتساوي الاضلاع) لان النقاط الاربع تشكل رؤوس مربع وفيه يكون الاختلاف المركزي (e) مقدار ثابت قيمته $(\sqrt{2})$.

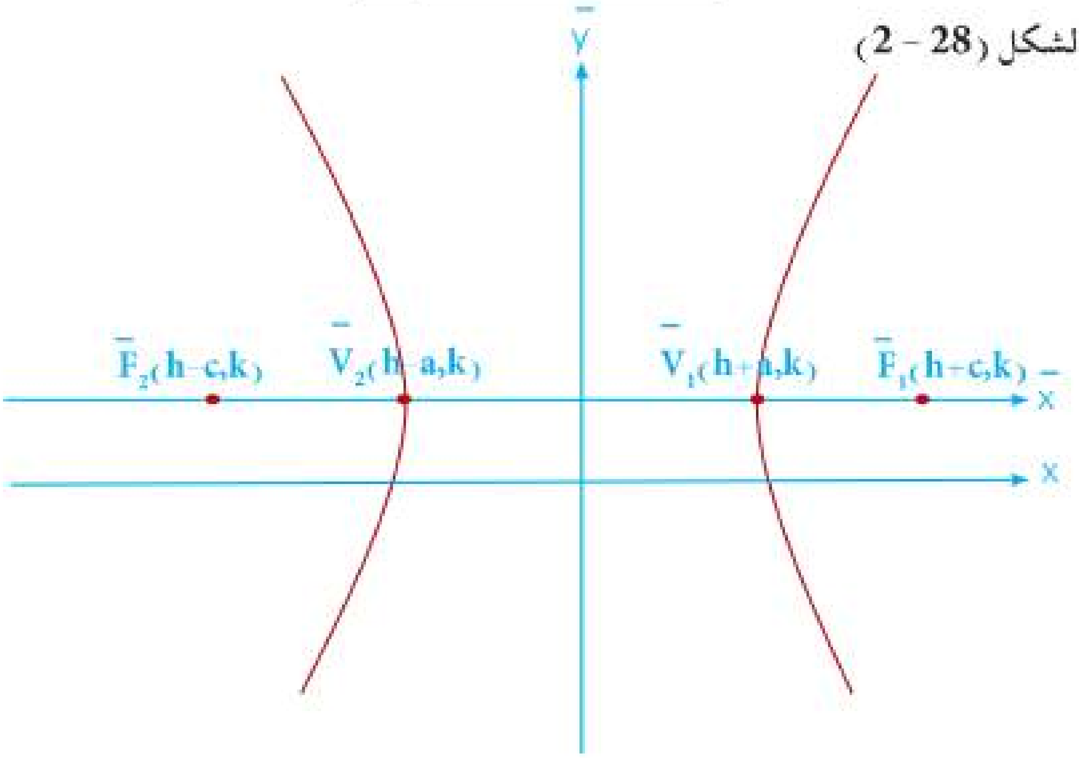
[2-7] انسحاب محاور القطع الزائد :

[2-7-1] معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h,k) ومحوراه يوازيان المحورين المتعامدين.

اولاً: عند انسحاب مركز القطع الزائد بمقدار (h) من الوحدات على محور السينات وبمقدار (k) من الوحدات على محور الصادات والمحور الحقيقي يوازي محور السينات تصبح المعادلة.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

كما في الشكل (2 - 28)



الشكل (2-28)

حيث المحور الحقيقي يوازي محور السينات

والبؤرتان هما $\bar{F}_1(c+h,k)$, $\bar{F}_2(-c+h,k)$

والرأسان هما $\bar{V}_1(a+h,k)$, $\bar{V}_2(-a+h,k)$

ثانياً : يمكن الحصول على معادلة القطع الزائد الذي محوره الحقيقي يوازي محور الصادات ومركزه نقطة (h,k) .

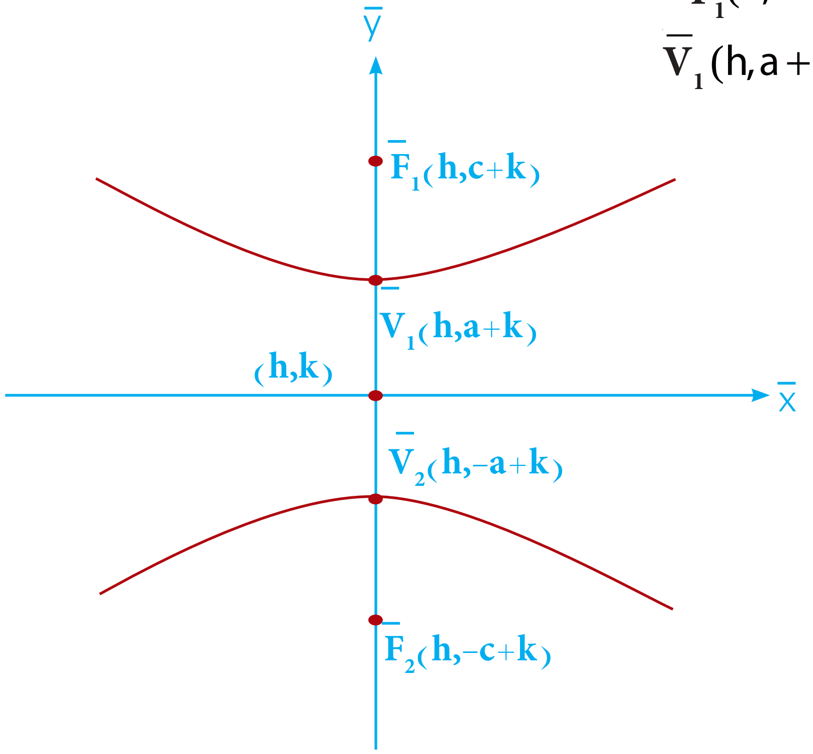
في هذه الحالة تكون المعادلة للقطع الزائد هي :

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

وكما في الشكل $(2-29)$

البؤرتان هما $\bar{F}_1(h,c+k)\ ,\ \bar{F}_2(h,-c+k)$

والرأسان هما $\bar{V}_1(h,a+k)\ ,\ \bar{V}_2(h,-a+k)$



الشكل $(2-29)$

ملاحظة سنقتصر في البند [7 - 2] على ايجاد مركز القطع الزائد وبؤرتاه ورأساه وطول المحورين.

مثال -22-

جد احداثيا المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

الحل

بمقارنة هذه المعادلة :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

بالمعادلة القياسية

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

نجد :

طول المحور الحقيقي $\Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3 \Rightarrow 2a=6$ وحدة

طول المحور المرافق $\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2b=4$ وحدة

$\Rightarrow h=-2 \ , \ k=1$

المركز $\therefore (h,k)=(-2,1)$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

لان المحور الحقيقي يوازي محور السينات $\therefore \overline{F}_1(c+h,k) \ , \ \overline{F}_2(-c+h,k)$

البؤرتان $\Rightarrow \overline{F}_1(\sqrt{13}-2,1) \ , \ \overline{F}_2(-\sqrt{13}-2,1)$

$\overline{V}_1(a+h,k) \ , \ \overline{V}_2(-a+h,k)$

الرأسان $\overline{V}_1(1,1) \ , \ \overline{V}_2(-5,1)$

(الاختلاف المركزي) $\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

تمارين

1. عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية :

a) $12x^2-4y^2=48$ b) $16x^2-9y^2=144$

c) $2(y+1)^2-4(x-1)^2=8$ d) $16x^2+160x-9y^2+18y=185$

2. اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ. البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm 3$ ومركزه نقطة الاصل.

ب. طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل.

جـ. مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3).

3. جد باستخدام تعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(-2\sqrt{2},0)$, $(2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات.

4. قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$, $(1,-2\sqrt{5})$. جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل.

5. قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2-ky^2=90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2=576$ جد قيمة كل من h , k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية.

6. اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1 , 9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

7. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل.

8. النقطة $p(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من:

أ. قيمة L. ب. طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

9. جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.