1

الفصل الاول

Chapter One

Complex Numbers الاعداد المركبة

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية.

[1-2] العمليات على مجموعة الاعداد المركبة.

[1-3] مرافق العدد المركب.

[1-4] الجذور التربيعية للعدد المركب.

[1-5] حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$.

[1-6] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

[1-7] التمثيل الهندسي للاعداد المركبة.

[1-8] الصيغة القطبية للعدد المركب.

[1-9] مبرهنة ديمواڤر.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الجزء الحقيقي للعدد R (z):z	$R(z) = x = r\cos\theta$
الجزء التخيلي للعدد I (z): z	$I(z) = y = r\sin\theta$
سعة العدد المركب z	$\arg(z) = \theta$
مقياس العدد المركب z	$r = \|\|z\|\| = \bmod z$
الطرف الايسر	LHS
الطرف الايمن	RHS
الأعداد الكلية	W
الاعداد الطبيعية	N
الاعداد الصحيحة	Z
الاعداد النسبية	Q
الاعداد الحقيقية	R
الاعداد المركبة	$\mathbb{C}$

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الصفوف السابقة حل المعادلة الخطية (**Linear Equation**)، وعرفنا انه يوجد حل واحد في مجموعة الاعداد الحقيقية لاية معادلة خطية.

وعند دراستنا للمعادلة التربيعية تبين أنه لنوع معين منها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية، ونوع آخر لا يوجد لها حل في هذه المجموعة، مثل المعادلات: ($x^2 + 1 = 0$) ، ($x^2 + 4x + 5 = 0$) وكما تعلمت ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها ($b^2 - 4ac$) عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية.

ان ظهور مثل هذه المعادلات في العديد من التطبيقات الفيزياوية والهندسية ادى الى الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة اوسع منها هي مجموعة الاعداد المركبة والتي سوف تكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.

إننا عندما نريد حل المعادلة ($x^2+1=0$) أو ($x^2=-1$) لانجد عدداً حقيقياً مربعه يساوي (-1) لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو غير حقيقي ونرمز له بالرمز (i) ويسمى الوحدة التخيلية (**Imaginary Unit**) وهو ليس من الاعداد التي تقرن مع العد أو القياس.

إن العدد (i) يحقق الخواص الجبرية للاعداد الحقيقية ما عدا خاصية الترتيب، ولهذا نستطيع حساب قوى (i) كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 . i = (-1).i = -i$$
$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^{27} = i^{26}.i = (i^2)^{13}.i = (-1)^{13}.i = -i$$
$$i^{81} = i^{80}.i = (i^2)^{40}.i = (-1)^{40}.i = 1.i = i$$
$$i^{-7} = (i)^{-8}.i = (i^2)^{-4}.i = (-1)^{-4} . i = i$$
$$i^{-15} = i^{-16}.i = (i^2)^{-8}.i = (-1)^{-8} . i = i$$

وبصورة عامة يكون

$$i^{4n+r} = i^r , \quad n \in w , \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad \text{حيث}$$

$$\text{whole Numbers} \quad w=\{0,1,2,\ldots\} \quad \text{حيث}$$

وهذا يعني انه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{1 , -1 , i, -i\}$

حيث نقسم اس (i) على (4) والباقي هو الأس الجديد الى (i) .

فمثلاً : $i^{25} = i$ لأن ناتج قسمة 25 على 4 يساوي 6 والباقي 1 .

$i^{99} = i^3 = -i$ لأن ناتج قسمة 99 على 4 يساوي 24 والباقي 3 .

مثال- 1-

اكتب ما يلي في ابسط صورة:

(a) i^{16} (b) i^{58} (c) i^{12n+93} (d) i^{-13}

الحل:

(a) $i^{16} = i^{4(4)+0} = i^0 = 1$

(b) $i^{58} = i^{4(14)+2} = i^2 = -1$

(c) $i^{12n+93} = (i^4)^{3n} . i^{93} = (1)^{3n}\, i^{4(23)+1} = (1)(i) = i$

(d) $i^{-13} = \dfrac{1}{i^{13}} = \dfrac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

ملاحظة يمكننا كتابة الجذور التربيعية لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i فمثلاً:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{-1} = 4\,i$$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{-1} = 5\,i$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \,.\, \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-15} = \sqrt{15} \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{15}\,i$$

وبصورة عامة يكون

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i \quad , \forall\ a \geq 0$$

والآن بعد أن تعرفنا على العدد التخيلي ماذا نسمي العدد ($a+bi$) حيث a عدد حقيقي، b عدد حقيقي، $i = \sqrt{-1}$؟

تعـريـف [1-1-1] العدد المركب

يقـال للعـدد $c = a+bi$ حيث a,b عـددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ عـددٌ مـركبٌ (**Complex Number**)، يسمى a جزؤه الحقيقي(**Real Part**) ويسمى b جزؤه التخيلي (**Imaginary Part**). ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة $a+bi$ الصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب.

ملاحظـة ان اي عدد مركب $c = a + bi$ يمكن جعله مناظراً للزوج المرتب الوحيد (a,b)

اذ أن b,a عددان حقيقيان، وبالعكس فالعدد الحقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو ($a,0$). وان العدد i (**Imaginary Unit**) حيث ان: $i \Leftrightarrow (0,1)$ او $i = 0+1i$.

يقال للعدد $bi \Leftrightarrow (0\ ,\ b)$ عدد تخيلي بحت (**pure Imaginary Number**) والعدد $a = a+0i \Leftrightarrow (a\ ,\ 0)$ إنه عدد حقيقي بحت (**Pure Real Number**) .

فالعدد $-2+3i$ عدد مركب، جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 3

والعدد -2 عدد مركب، جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 0

اما العدد $-3i$ فهي عدد مركب، جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي -3

مثال- 2-

اكتب الأعداد الآتية على صورة $a+bi$:

a) -5 b) $\sqrt{-100}$ c) $-1-\sqrt{-3}$ d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

الحل :

a) $-5=-5+0i$

b) $\sqrt{-100}=\sqrt{100}\sqrt{-1}=10i=0+10i$

c) $-1-\sqrt{-3}=-1-\sqrt{3}\,i$

d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{25}\;i}{4}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$

بما ان كل عدد حقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a,0)$ اي يمكن كتابته على صورة عدد مركب جزؤه التخيلي صفر فان هذا يبين أن :

ملاحظـة

مجموعة الاعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ اي ان $R\subset\mathbb{C}$.

تعـــريـف [1-1-2] تساوي الاعداد المركبة

اذا كان : $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$

فإنّ : $c_1=c_2 \Leftrightarrow a_1=a_2$, $b_1=b_2$

اي يتساوى العددان المركبان اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس.

مثال – 3 –

جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي .

a) $2x-1+2i = 1+(y+1)i$.

b) $3x+4i = 2+8yi$

c) $(2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

الحل :

a) $\because\ 2x-1+2i = 1+(y+1)i$

$\therefore\ 2x-1 = 1 \Rightarrow 2x = 2$

$\Rightarrow\ x = 1$

$2 = y+1 \Rightarrow y = 2-1$

$\therefore\ y = 1$

b) $3x+4i = 2+8yi$

$\therefore\ 3x = 2\ ,\ 4 = 8y \Rightarrow$

$x = \frac{2}{3}\ ,\ y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $\because\ (2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

$\therefore\ 2y+1 = -8\ ,\ -(2x-1) = 3 \Rightarrow$

$2y = -9\ ,\ -2x = 2 \Rightarrow$

$y = \frac{-9}{2}\ ,\ x = -1$

[1-2] العمليات على مجموعة الاعداد المركبة.

اولاً: عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة :

تعريف [1-2-1] جمع الاعداد المركبة

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i\,,\ c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

وكما تعلم أن: $(b_1 + b_2) \in R$ ، $(a_1 + a_2) \in R$ لان مجموعة الاعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع .

$$\therefore\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i \in \mathbb{C}$$

اي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع .

مثال -4-

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

a) $3+4\sqrt{2}i,\ 5-2\sqrt{2}i$

b) $3,\ 2-5i$

c) $1-i,\ 3i$

الحل :

a) $(3+4\sqrt{2}i)+(5-2\sqrt{2}i)=(3+5)+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$

$$=8+2\sqrt{2}i$$

b) $(3)+(2-5i)=(3+0i)+(2-5i)$

$$=(3+2)+(0-5)i=5-5i$$

c) $(1-i)+3i=(1-i)+(0+3i)$

$$=(1+0)+(-1+3)i=1+2i$$

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الجمع على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

فان :

* الخاصية الابدالية . (Commutativity)

(1) $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$

* الخاصية التجميعية . (Associativity)

(2) $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$

* النظير الجمعي . (Additive Inverse)

(3)

$\forall c \in \mathbb{C},\ c = a + bi\ \exists\, z \in \mathbb{C} :\ c + z = z + c = 0 \Rightarrow z = -c = -a - bi$

*العنصر المحايد الجمعي . Additive Identity يرمز له بالرمز e ويُعرف

(4) $e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

ملاحظة ان طرح أي عدد مركب من آخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني.

مثال -5- جد ناتج :

$(7-13i) - (9+4i)$

الحل :

$(7-13i) - (9+4i)$

$=(7-13i) + (-9-4i)$

$=(7-9) + (-13-4)i$

$= -2 - 17i$

مثال -6-

حل المعادلة :

$(2-4i)+x=-5+i$

حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :

$(2-4i)+x=-5+i$

باضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$ للطرفين $(2-4i)+(-2+4i)+x=(-5+i)+(-2+4i)$

$$\therefore\ x=(-5+i)+(-2+4i)$$
$$=(-5-2)+(1+4)i$$
$$x=-7+5i$$

ثانياً: عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة :

لايجاد عملية ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما بصفتهما مقدارين جبريين ونعوض بدلاً من العدد i^2 (-1) كما يأتي :

اذا كان $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$ فان

$$c_1 \cdot c_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$$
$$=a_1a_2++a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$$
$$=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

ملاحظة

اذا كان ، $m \in R$ $c=a+bi$ فان

$mc=ma+mbi$

ضرب الاعداد المركبة

تعـــريـف [1-2-2]

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان :

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

وكما تعلم : $(a_1a_2 - b_1b_2) \in R$ وان $(a_1b_2 + a_2b_1) \in R$ لان

R مغلق تحت عملية الضرب

لذلك فان $c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{C}$

أي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال- 7-

جد ناتج كلا مما ياتي :

a) $(2-3i)(3-5i)$

b) $(3+4i)^2$

c) $i(1+i)$

d) $-\frac{5}{2}(4+3i)$

e) $(1+i)^2 + (1-i)^2$

الحل :

a) $(2-3i)(3-5i) = (6-15)+(-10-9)i$

$= -9-19i$

او يمكن ايجاد حاصل الضرب بالتوزيع

$(2-3i)(3-5i) = 6-10i-9i+15i^2 = -9-19i$

b) $(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$

$= 9+24i-16$

$= -7+24i$

أو $(3+4i)^2 = (3+4i)(3+4i) = (9-16)+(12+12)i = -7+24i$

c) $i(1+i) = i+i^2 = -1+i$

$d)-\frac{5}{2}(4+3i)=-10-\frac{15}{2}i$

$e)(1+i)^2+(1-i)^2=(1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$=2i+(-2i)=0$

خواص عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الاعداد المركبة بالخواص الآتية:

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

* الخاصية الابدالية. (Commutativity) (1) $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$
* الخاصية التجميعية. (Associativity) (2) $c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$
* يتوفر العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Identity) وهو (3) $1=(1+0i)$
* النظير الضربي (Multiplicative Inverse)

(4) $\forall c \neq 0+0i \ , \ \exists z \neq 0+0i : c\,z = z\,c = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{c}$

اي ان لكل عدد مركب c عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ (يختلف عن الصفر) ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة.

[1-3] مرافق العدد المركب Conjugate Number

تعريف [1-3-1] مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $c=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{c}=a-bi$ ، $\forall\ a, b \in R$

فمثلاً: $3+i$ هو مرافق العدد $3-i$ وبالعكس، وكذلك مرافق (i) هو $(-i)$ وبالعكس.

وان $5-4i$ مرافق $5+4i$ وبالعكس، وكذلك مرافق العدد 7 هو 7 .

ملاحظة يتضح من تعريف المرافق أنه يحقق الخواص الآتية:

1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$

2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

3) $\overline{\overline{c}} = c$

4) $c \times \overline{c} = a^2 + b^2$ فان $c = a + bi$ اذا كان

5) $\overline{c} = c$ فان $c \in \mathbb{R}$ اذا كان

6) $\overline{\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)} = \dfrac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$

مثال -8- اذا كان $c_2 = 3 - 2i$, $c_1 = 1 + i$ فتحقق من :

(1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ (2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

الحل :

(1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)}$

$= \overline{(4-i)} = 4+i$

$\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)+(3+2i) = 4+i$

$\therefore \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

تأكد بنفسك ان $\overline{c_1 - c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$

(2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3-2i+3i-2i^2} = \overline{5+i} = 5-i$

$\overline{c_1} \times \overline{c_2} = \overline{(1+i)} \; \overline{(3-2i)} = (1-i)(3+2i)$

$= (3+2)+(2-3)i = 5-i$

$\therefore \overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

مثال -9-

جد النظير الضربي للعدد $c = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب .

الحل :

النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2-2i}$$

$$= \frac{1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

مثال -10-

اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$.

الحل :

$$\frac{3-2i}{i} = \overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}$$

$$\frac{3-2i}{i} = \frac{x+yi}{1-5i}$$

$$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$\therefore x = -17$$

$$y = 7$$

مثال -11-

اذا كان $c_1 = 3 - 2i$, $c_2 = 1 + i$ فتحقق من : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

الحل :

$$\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)}$$

$$=\overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)}=\overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1}\right)}$$

$$=\overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)}=\overline{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}=\frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}}=\frac{3+2i}{1-i}$$

$$=\frac{3+2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\therefore\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

ملاحظة

لاجراء قسمة العدد المركب c_1 على العدد المركب c_2 حيث $c_2\neq0$ فاننا نضرب بسط ومقام المقدار $\frac{c_1}{c_2}$ بمرافق المقام فيكون:

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{c_1}{c_2}\times\frac{\overline{c_2}}{\overline{c_2}}$$

مثال -12-

ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a+bi$:

a) $\frac{1+i}{1-i}$ b) $\frac{2-i}{3+4i}$ c) $\frac{1+2i}{-2+i}$

الحل :

a) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$

b) $\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$

c) $\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\frac{-5i}{5}=-i=0-i$

ملاحظة

يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة a+bi وذلك :

$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$

مثال -13-

حلل كلاً من العددين 10 ، 53 الى حاصل ضرب عاملين من صورة a+bi حيث b,a عددين نسبيين .

الحل :

- $10=9+1$ او $10=1+9$

$=9-i^2$ $\qquad$ $=1-9i^2$

$=(3-i)(3+i)$ $\qquad$ $=(1-3i)(1+3i)$

- $53=49+4$ او $53=4+49$

$=49-4i^2$ $\qquad$ $=4-49i^2$

$=(7-2i)(7+2i)$ $\qquad$ $=(2-7i)(2+7i)$

تمارين

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب:

i^5 , i^6 , i^{124} , i^{999} , i^{4n+1} $\forall n \in w$, $(2+3i)^2+(12+2i)$

$(10+3i)(0+6i)$, $(1+i)^4-(1-i)^4$, $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$

$\frac{i}{2+3i}$, $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$, $\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}$, $(1+i)^3+(1-i)^3$

2. جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية:

a) $y+5i=(2x+i)(x+2i)$

b) $8i=(x+2i)(y+2i)+1$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

3. اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

4. حلل كلاً من الاعداد 85 ، 41 ، 125، 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة a+ bi حيث b, a عددان نسبيان.

5- جد قيمة x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان.

[4-1] الجذور التربيعية للعدد المركب .

لقد تعلمت أنه اذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فانه يوجد عددان حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحقق كل منهما المعادلة $x^2 = a$ ويسمى $\pm\sqrt{a}$ الجذرين التربيعيين للعدد a . أما اذا كان $a = 0$ فان له جذر واحد هو 0 . والآن سنتناول دراسة الجذور التربيعية للعدد المركب .

مثال -14- جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$.

الحل : نفرض ان الجذر التربيعي للعدد c هو $x + yi$

$$\therefore (x+yi)^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 8+6i \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &x^2 - y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ &2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \ldots\ldots(2) \end{aligned}\right\}$$ من تعريف تساوي عددين مركبين

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8$$

بضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Rightarrow$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$x = \pm 3$ او $x^2 = -1$

$x^2 = -1$ (تهمل لان $x \in R$)

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x نحصل على :

$$y = \frac{3}{\pm 3}$$

$$\therefore y = \pm 1$$

x	3	-3
y	1	-1

$\therefore\ c_1 = 3 + i$ و $c_2 = -3 - i$

أي أن جذري العدد c هما $3 + i$, $-3 - i$

مثال -15-

جد الجذور التربيعية للاعداد : **-25 ، -17 ، $-i$ ، $8i$,**

الحل :

a) نفرض ان :
$$c^2=-25$$
$$c=\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25}\,i=\pm 5i$$

b) نفرض ان :
$$c^2=-17$$
$$c=\pm\sqrt{-17}$$
$$\Rightarrow c=\pm\sqrt{17}\,i$$

c) نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-i$

$$\therefore (x+yi)^2=-i \Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=0-i$$
$$x^2-y^2=0.......(1)$$
$$2xy=-1$$
$$\therefore y=\frac{-1}{2x}.........(2)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) بالمعادلة (1) ينتج :

$$x^2-\frac{1}{4x^2}=0\Rightarrow$$

بضرب الطرفين في $4x^2\neq 0$ ينتج :

$$4x^4-1=0\Rightarrow$$
$$(2x^2-1)(2x^2+1)=0$$

اما $x^2=-\frac{1}{2}$ (يهمل لان $x\in R$)

او $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتعويض في (2) عن قيمة x نجد :
$$\therefore y=-\left(\frac{1}{\pm(2)\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$
$$=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ جذرا العدد $-i$ التربيعيان هما $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

d) نفرض ان $x+yi$ هو الجذر التربيعي للعدد $8i$

$\therefore (x+yi)^2 = 8i \Rightarrow$

$x^2+2xyi-y^2 = 0+8i$

$x^2-y^2=0$........................(1)

$2xy=8 \Rightarrow y=\frac{4}{x}$..............(2)

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$x^2-\frac{16}{x^2}=0$

وبضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$x^4-16=0 \Rightarrow$

$(x^2-4)(x^2+4)=0 \Rightarrow$

اما $x^2=-4$ (يهمل لان $x \in R$)

او $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x ينتج :

$y=\frac{4}{\pm 2}=\pm 2$

x	2	−2
y	2	−2

∴ جذرا العدد $8i$ التربيعيان هما $\pm(2+2i)$

[1-5] حل المعادلة التربيعية في ($\mathbb{C}$) .

تعلمت من المرحلة المتوسطة ان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ وان $a, b, c \in R$ حلين يمكن ايجادهما بالدستور :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وعرفت أنه اذا كان المقدار المميز $b^2 - 4ac$ سالباً فانه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن يوجد لها حلان في مجموعة الاعداد المركبة .

مثال -16- حل المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الاعداد المركبة.

الحل : حسب القانون (الدستور) :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (4)(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\mathbf{i}}{2} \qquad = -2 \pm \mathbf{i}$$

اذاً مجموعة حل المعادلة هي : $\{-2 - \mathbf{i} \ , \ -2 + \mathbf{i}\}$

ملاحظة

من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها حقيقية هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ومجموع الجذرين هو : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين هو : $x_1 \ . \ x_2 = \frac{c}{a}$

ويمكن الافادة من هذه الخواص كما يأتي :

اولاً : اذا كان $x + yi$ $(y \neq 0)$ احد جذري المعادلة $a,b,c \in R$, $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

فان $x - yi$ هو الجذر الآخر لها .

ثانياً : بقسمة طرفي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ على $a \neq 0$ نحصل على

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ والتي هي عبارة عن :

$$\boxed{x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\,x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0}$$

مثال -17- جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$.

الحل :

مجموع الجذرين هو : $(2+2i)(-2-2i) = (2-2)+(2-2)i=0$

حاصل ضرب الجذرين هو : $(2+2i)(-2-2i) = -(2+2i)^2$

$$= -(4+8i+4i^2)$$

$$= -8i$$

$\therefore$ المعادلة التربيعية هي :

$$x^2-0x+(-8i)=0 \Rightarrow$$

$$x^2-8i=0 \Rightarrow x^2=8i$$

مثال -18- كوِّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3-4i$.

الحل :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

$\therefore$ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+4i$

مجموع الجذرين $= 6$ وحاصل ضربهما $= 25$

$\therefore$ المعادلة هي :

$$x^2-6x+25=0$$

تمارين

1. حل المعادلات التربيعية الآتية وبين اي منها يكون جذراها مترافقين؟

a) $z^2 = -12$

b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

d) $z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

e) $4z^2 + 25 = 0$

f) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

2. كون المعادلة التربيعية التي جذراها M,L حيث:

a) $M = 1 + 2i$ $\quad L = 1 - i$

b) $M = \dfrac{3 - i}{1 + i}$, $L = (3 - 2i)^2$

3. جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية:

a) $-6i$

b) $7 + 24i$

c) $\dfrac{4}{1 - \sqrt{3}\, i}$

4. ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو:

a) i

b) $5 - i$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + 3i}{4}$

5- اذا كان $3 + i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$؟ وما هو الجذر الاخر؟

[1-6] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

ليكن z احد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

فان $z^3 = 1$ ومنها :

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$(z-1)(z^2+z+1) = 0 \Rightarrow$$

أما $z^2+z+1=0$ او $z=1$

ولحل المعادلة $z^2+z+1=0$ نستخدم الدستور :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-(4)(1)(1)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

اي ان الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي :

$$1 \ , \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ , \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ان مربع أي من الجذرين التخيليين يساوي الجذر التخيلي الاخر وهما مترافقان (تحقق من ذلك)

فاذا رمزنا لاحد الجذرين التخيليين بالرمز ω "ويقرأ أوميكا "**Omega** فان الجذر الآخر هو ω^2 .

ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :

$$\boxed{1, \omega \ , \ \omega^2}$$

وهذه الجذور تحقق الخواص الآتية :

1) $1+\omega+\omega^2=0$

2) $\omega^3=1$

ومن الخاصية الاولى نحصل على الاتي :

1) $\omega+\omega^2=-1$ (2) $1+\omega=-\omega^2$ (3) $1+\omega^2=-\omega$

4) $\omega=-1-\omega^2$ (5) $\omega^2=-1-\omega$ (6) $1=-\omega-\omega^2$

ومن الخاصية الثانية يمكن التوصل الى النتائج الاتية :

$$\omega^4=\omega^3.\ \omega=1.\ \omega=\omega$$

$$\omega^{-4}=\frac{1}{\omega^4}=\frac{1}{\omega^3.\ \omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$$

$$\omega^5=\omega^3.\ \omega^2=1.\ \omega^2=\omega^2$$

$$\omega^{-5}=\frac{1}{\omega^5}=\frac{1}{\omega^3.\ \omega^2}=\frac{1}{1.\ \omega^2}=\frac{\omega^3}{\omega^2}=\omega$$

$$\omega^6=(\omega^3)^2=(1)^2=1$$

$$\omega^{-6}=\frac{1}{\omega^6}=\frac{1}{1}=1$$

وبالاستمرار على هذا النحو فان قوى (ω) لاعداد صحيحة تأخذ احدى القيم :

$1,\omega,\ \omega^2$

وتتكرر هذه القيم كلما زادت الاسس على التوالي بمقدار (3) .

بمعنى أن :

$$\omega^{3n+r}=\omega^r$$

$r=0,1,2$, حيث n عدد صحيح

مثال -19-

جد ناتج : ω^{-58} ، ω^{25} ، ω^{33}

الحل :

$$\omega^{33} = \omega^{3(11)+0} = \omega^{0} = 1$$

$$\omega^{25} = \omega^{3(8)+1} = \omega^{1} = \omega$$

$$\omega^{-58} = \omega^{3(-20)+2} = 1 \, . \, \omega^{2} = \omega^{2}$$

بمعنى أن :

باقي قسمة أ س (ω) على (3) هو الاس الجديد الى ω

مثال -20-

اثبت ان :

a) $\omega^{7} + \omega^{5} + 1 = 0$

b) $(5+3\omega+3\omega^{2})^{2} = -4(2+\omega+2\omega^{2})^{3} = 4$

الحل :

a) $LHS = \omega^{7} + \omega^{5} + 1 = \omega^{6} . \, \omega + \omega^{3} . \, \omega^{2} + 1$

$= \omega + \omega^{2} + 1 = 0 = RHS$ (حسَب الخاصية الاولى)

b) المقدار الاول $= (5+3\omega+3\omega^{2})^{2} = [5+3(\omega+\omega^{2})]^{2}$

$= [5-3]^{2} = (2)^{2} = 4$

كذلك

المقدار الثاني $= -4(2+\omega+2\omega^{2})^{3}$

$= -4[2(1+\omega^{2})+\omega]^{3}$

$= -4[-2\omega+\omega]^{3} = -4 \; [-\omega]^{3}$

$= -4(-1) = 4$

$\therefore (5+3\omega+3\omega^{2})^{2} = -4(2+\omega+2\omega^{2})^{3} = 4$

مثال -21-

كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها a) $1-i\omega^2 \ , \ 1-i\,\omega$

b) $\dfrac{2}{1-\omega} \ , \ \dfrac{2}{1-\omega^2}$

الحل :

a)

مجموع الجذرين

$$(1-i\omega^2) + (1-i\,\omega)$$
$$=2-i(\omega^2+\omega)$$
$$=2+i$$

حاصل ضرب الجذرين

$$(1-i\omega^2)(1-i\omega)$$
$$=1-i\omega-i\omega^2+i^2\omega^3$$
$$=1-i(\omega+\omega^2)+(-1)(1)$$
$$=i$$

∴ المعادلة هي : $x^2-(2+i)x+i=0$

b)

مجموع الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega}+\frac{2}{1-\omega^2}$$
$$=\frac{2-2\omega+2-2\omega^2}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$=\frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2-(\omega+\omega^2)}$$
$$=\frac{6}{3}=2$$

حاصل ضرب الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega}\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$$
$$=\frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$=\frac{4}{3}$$

∴ المعادلة هي : $x^2-2x+\dfrac{4}{3}=0$

تمارين

1 . اكتب المقادير الآتية في ابسط صورة:

a) ω^{64} b) ω^{-325} c) $\dfrac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}$ d) $(1+\omega^2)^{-4}$ e) ω^{9n+5} , حيث $n \in w$

2 . كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها :

a) $1+\omega^2 \ , \ 1+\omega$

b) $\dfrac{\omega}{2-\omega^2} \ , \ \dfrac{\omega^2}{2-\omega}$

c) $\dfrac{3i}{\omega^2} \ , \ \dfrac{-3\omega^2}{i}$

3 . اذا كان : $z^2+z+1=0$ **فجد قيمة :** $\dfrac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

4 . اثبت ان :

a) $\left(\dfrac{1}{2+\omega}-\dfrac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\dfrac{2}{3}$

c) $\left(1-\dfrac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\dfrac{5}{\omega}\right)=18$

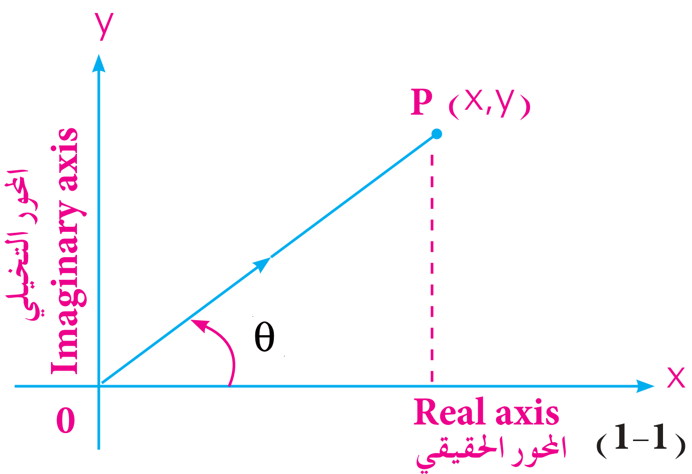
d) $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

[1-7] التمثيل الهندسي للاعداد المركبة.

Geometric Representation of Complex Numbers.

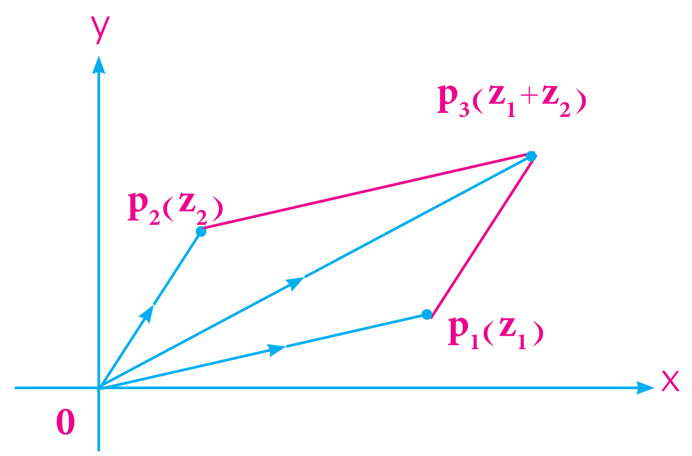
اذا كان E^2 (او R^2) يمثل المستوي الاقليدي المتعامد المحورين. فانه باقران كل عدد مركب $x+yi$ (حيث $x,y \in R$) بالنقطة (x,y) في E^2 نحصل على تطبيق تقابل من E الى R^2 . وفي هذا المستوي سنمثل هندسياً بعض العمليات الجبرية البسيطة في الجمع والطرح في E والتي تقابل هندسياً العمليات في E^2 (او R^2).

سوف نتناول في هذا البند والبنود اللاحقة تمثيل بعض العمليات على الاعداد المركبة هندسياً والتي سنطلق على الاشكال التي تمثلها اشكال ارجاند نسبة الى العالم (J. R . Argand, 1768 - 1822) وسمي المستوي باسم العالم الالماني الشهير غاوس، بمستوي غاوس (C. F. Gauss 1777-1855) أو بشكل مبسط المستوي المركب (Complex Plane)



الشكل (1-1)

اذ يسمى المحور السيني (x-axis) بالمحور الحقيقي حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب اما المحور الصادي (y - axis) فيطلق عليه اسم المحور التخيلي والذي يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب. وبالتالي فان العدد المركب $x + yi$ يُمثل هندسياً بالنقطة (x,y) لاحظ الشكل (1-1)



الشكل (1-2)

لو كان $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2 , y_2)$ فان :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة $p_3(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات. كما في الشكل (1- 2) :

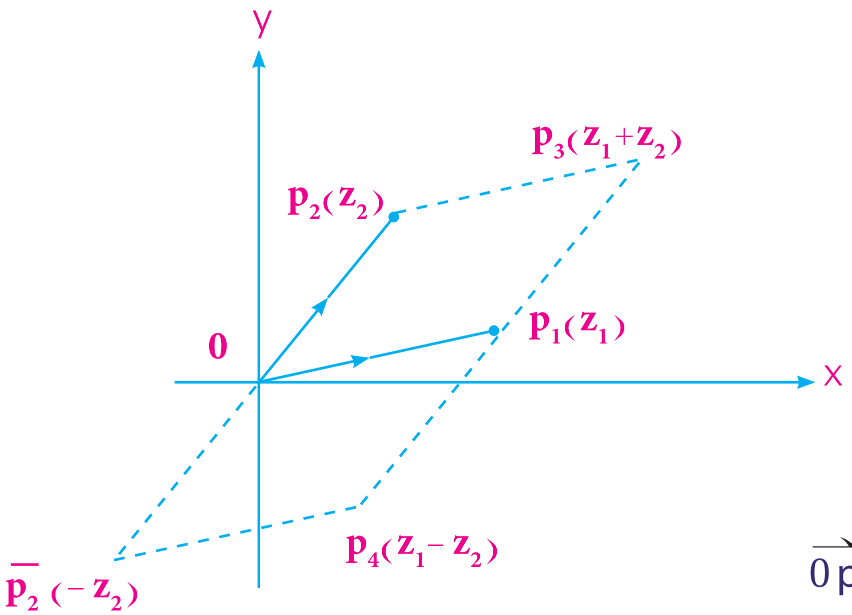
اي ان $\overrightarrow{0p_1} + \overrightarrow{0p_2} = \overrightarrow{0p_3}$

ان العدد المركب $x + yi$ يمكن تمثيله بالمتجه $\overrightarrow{0p}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين.

اذا اعتبرنا $\overline{p}_2$ يمثل العدد المركب $-z_2$ فإن $\overline{p}_2$ هي ناتجة من دوران $\overrightarrow{0p_2}$ حول 0 نصف دورة ، وعليه فإن :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

والذي يقترن بالنقطة p_4 حيث $0p_1 p_4 \overline{p}_2$ يشابه متوازي الاضلاع $0p_1 p_3 p_2$ كما في الشكل (1-3).



الشكل (1-3)

أي أن $\overrightarrow{0p_4} = \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{0p_1} - \overrightarrow{0p_2}$

ملاحظة

(1) ليكن k عدد حقيقي لا يساوي الصفر . z عدد مركب فان النقطة التي تمثل kz يمكن الحصول عليها بواسطة التكبير الذي مركزه 0 ومعامله الثابت k.

(2) لكل عدد مركب z فان النقطة iz يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة.

مثال -22-

مثّل العمليات الاتية هندسياً في شكل ارجاند :

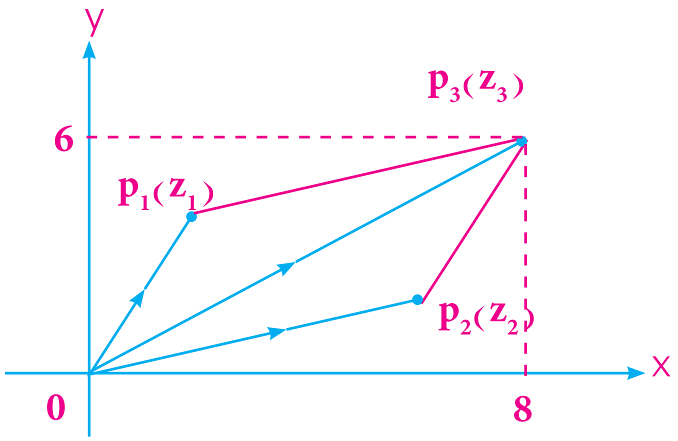
a) $(3+4i)+(5+2i)$ b) $(6-2i)-(2-5i)$

الحل :

a) $(3+4i)+(5+2i)=8+6i$

$z_1=3+4i \Rightarrow p_1(z_1)=p_1(3,4)$

$z_2=5+2i \Rightarrow p_2(z_2)=p_2(5,2)$



لاحظ : $\overrightarrow{0p_1}+\overrightarrow{0p_2}=\overrightarrow{0p_3}$

وهو مشابه الى جمع المتجهات .

ويكـــــون $0p_1\,p_3\,p_2$

متوازي اضلاع قطره هو $\overrightarrow{op_3}$

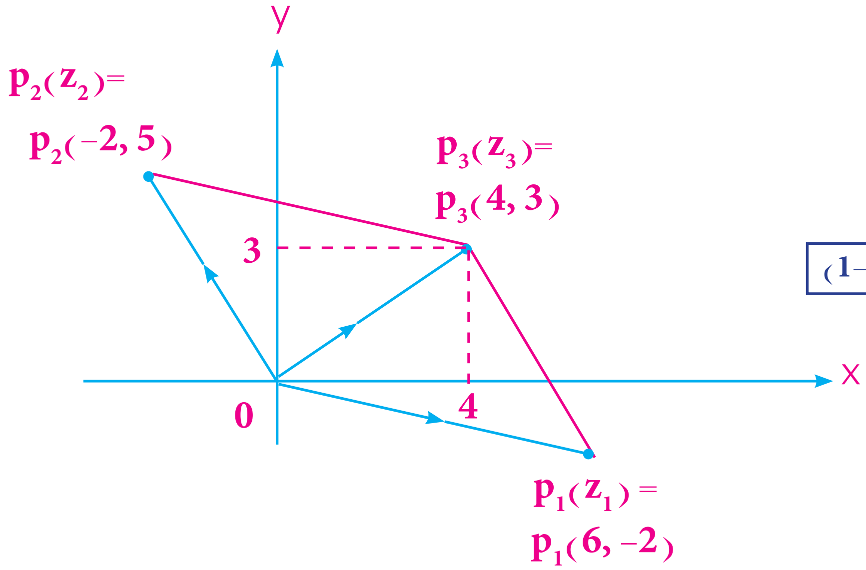
الشكل (1-4)

$z_1+z_2=z_3=8+6i \Rightarrow p_3(z_3)=p_3(8,6)$

b) $(6-2i)-(2-5i)=(6-2i)+(-2+5i)=4+3i$

$z_1=6-2i \Rightarrow p_1(z_1)=p_1(6,-2)$

$z_2=-2+5i \Rightarrow p_2(z_2)=p_2(-2,5)$



الشكل (1-5)

$z_3=4+3i \Rightarrow p_3(z_3)=p_3(4,3)$

تمارين

1. اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند .

$z_1 = 2 + 3i , \quad z_2 = -1 + 3i , \quad z_3 = 1 - i , \quad z_4 = i$

2. اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الاتية ثم مثّل الاعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند .

$z_1 = 5 + 3i , \quad z_2 = -3 + 2i , \quad z_3 = 1 - i , \quad z_4 = -2i$

3. اذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$z , \bar{z} , -z$

4. اذا كان $z_1 = 4 - 2i \ , z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$-3z_2 , \quad 2z_1 , \quad z_1 - z_2 , \quad z_1 + z_2$

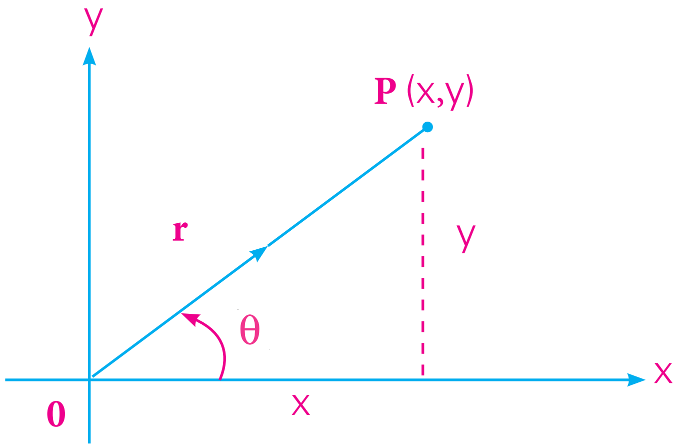
[1-8] الصيغة القطبية Polar Form للعدد المركب.

في البنود السابقة درسنا العدد المركب بصيغته الجبرية $z = x + yi$ والديكارتية $z = (x, y)$ وفي هذا البند سندرس صيغة اخرى للعدد المركب تدعى بالصيغة القطبية . وتحويل احدهما الى الاخرى .

فلو كان لدينا العدد المركب $z = x + yi$ ومثّلناه بالنقطة $p(x,y)$ كما في الشكل (1-6) فان : (r,θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة p حيث 0 يمثل القطب و $\overrightarrow{ox}$ يمثل الضلع الابتدائي ، وهذا يعني أن :

$r = \|\overrightarrow{op}\|$ وان $\theta = m(\angle xop)$

ويكون قياس θ من $\overrightarrow{ox}$ الى $\overrightarrow{op}$ بأتجاه عكس عقارب الساعة اذا كان القياس موجباً ، ومع اتجاه عقارب الساعة اذا كان القياس سالباً ويكون بالقياس الدائري وعليه فأن :



الشكل (1-6)

$$R(z) = x = r\cos\theta \quad ....(1)$$

$$I(z) = y = r\sin\theta \quad ....(2)$$

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي للعدد المركب z بينما $I(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد المركب z

r يسمى مقياس العدد المركب z (**Modulus of Complex Number**)

وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ "mod z" او مقياس z ويرمز له $\|z\|$ حيث $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ومن العلاقتين (1) و (2) نحصل على :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|z\|}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|z\|}$$

اما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب (**Argument of Complex Number**)

واختصاراً تكتب بالشكل $\theta = \arg(z)$

ملاحظــة
يمكن ان تاخذ θ عدداً غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الاخرى بعدد صحيح من الدورات.

فاذا كانت θ سعة عدد مركب فان كلاً من الاعداد : $\theta + 2n\pi$ حيث **n** عدد صحيح يكون ايضاً سعة لنفس العدد المركب.

اما اذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الاساسية لسعة العدد المركب (**Principle Value**).

مثال -23-
اذا كان $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج ان θ في الربع الاول

$$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

مثال -24-
اذا كان $z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

نستنتج ان θ في الربع الثالث

$$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

ملاحظة

1)ان سعة العدد المركب $z = 0$ غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له اتجاه.

2) ممكن الافادة من المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد المركب $z = x+yi$ بصورة اخرى تسمى الصيغة القطبية Polar From وكما يأتي :

$$\because \quad x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

$$\therefore \quad z = r\cos\theta + \mathbf{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

او

$$z = \|z\|(\cos(\arg z) + \mathbf{i}\sin(\arg z))$$

حيث $\|z\|$ = $r = \textbf{mod}\ z$ ، $\theta = \textbf{arg}(z)$ هي سعة العدد المركب z

مثال -25-

عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصيغة القطبية :

a) $-2+2\mathbf{i}$ b) $2\sqrt{3}-2\mathbf{i}$

الحل :

a) $z = -2+2\mathbf{i}$

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \ \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

الصيغة القطبية للعدد المركب z هي :

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

b) $z = 2\sqrt{3} - 2\,\mathbf{i}$

$$\text{mod } z = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\ \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore\ \mathbf{arg}\,(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$\therefore$ الصيغة القطبية للعدد المركب z هي : $z = \mathbf{4}\left(\cos\ \frac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\ \frac{11\pi}{6}\right)$

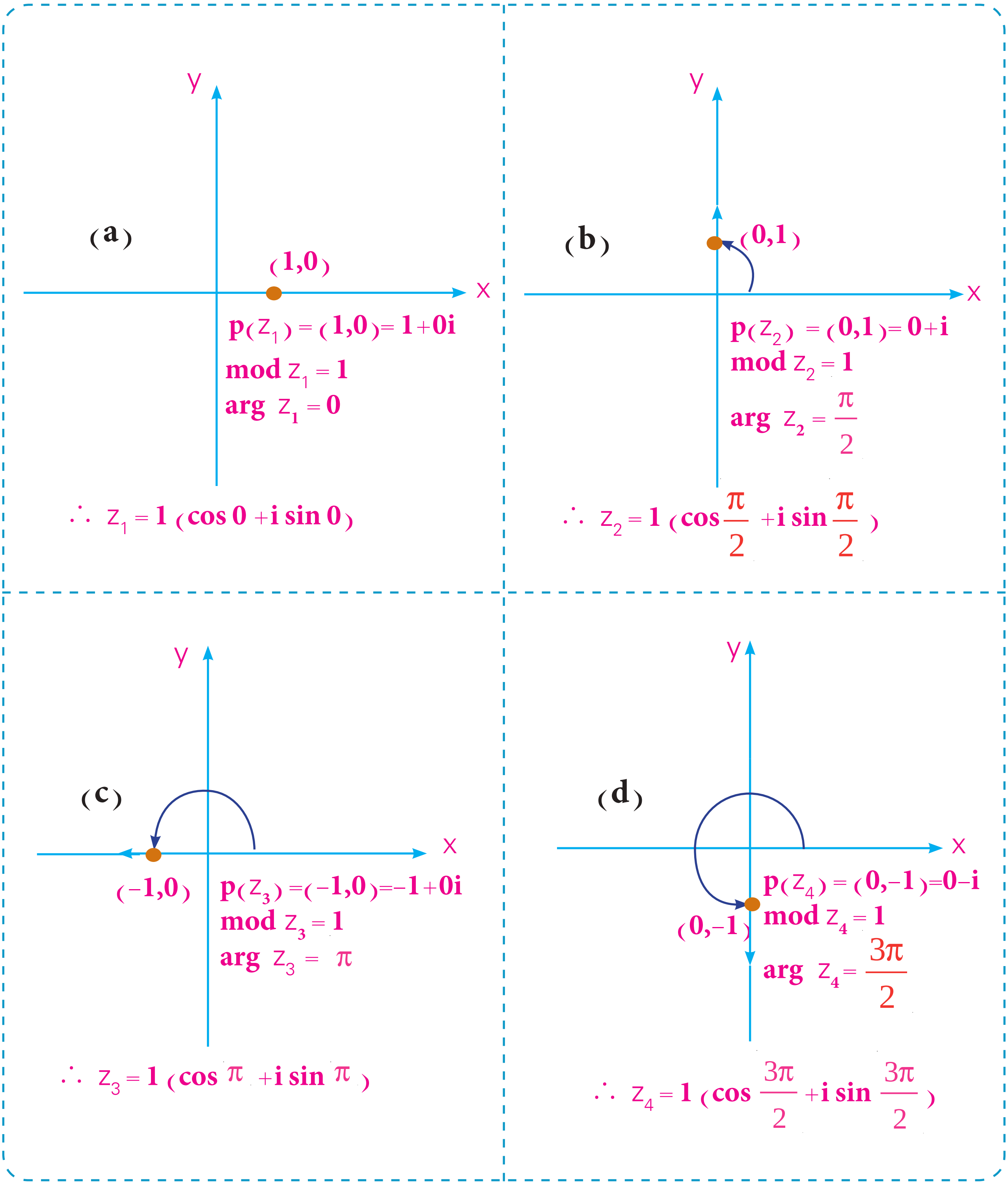
مثال -26-

عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

a) 1 b) i c) −1 d) −i

الحل :

لاحظ الاشكال الآتية :



الشكل (1-7)

من المثال السابق نستنتج الاتي :

$$1=(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-1=(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$\mathbf{i}=(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-\mathbf{i}=(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

وبتطبيق الاستنتاج السابق يمكن أن نضع :

$$3=3\times 1=3(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-2=2\times(-1)=2(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$5\mathbf{i}=5\times\mathbf{i}=5(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-7\mathbf{i}=7\times(-\mathbf{i})=7(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

[1-9] مبرهنة ديمواڤر.

De Moivre's Theorem

z_1, z_2 يمكن ان تكتب بصورة : $z_1=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta \quad , \quad z_2=\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi$

والان سنجد $z_1 \cdot z_2$ بالصيغة القطبية

$$z_1\times z_2=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi)$$
$$=\cos\theta\cos\phi+\mathbf{i}\cos\theta\sin\phi+\mathbf{i}\sin\theta\cos\phi+\mathbf{i}^2\sin\theta\sin\phi$$
$$=[\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi]+\mathbf{i}[\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi]=\cos(\theta+\phi)+\mathbf{i}\sin(\theta+\phi)$$

ولو كان $(\phi=\theta)$ فان العلاقة تصبح $(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta$

ويمكن برهنتها كما يأتي :

$$\text{LHS}=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=(\cos^2\theta+2\mathbf{i}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathbf{i}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta=\text{RHS}$$

وقد توصل العالم ديمواڤر (1664-1754) الى تعميم العلاقة والتي سميت بمبرهنة ديمواڤر .

مبرهنة ديموافر De Moivre's Theorem

لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فإن

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

البرهان : (للاطلاع فقط)

ستتوصل الى برهان هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي وكما يأتي :

1) لنعتبر $n = 1$ فان العلاقة تصبح :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\theta + i\sin 1\theta$ وهي عبارة صحيحة .

2) لنأخذ $k \geq 1$ ونفترض ان العلاقة صحيحة لكل $n = k$.

أي ان $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ صحيحة فرضاً .

3) يجب ان نثبت ان العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^1(\cos\theta + i\sin\theta)^k$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

$$= \cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

وعليه فاذا كانت العلاقة صحيحة عند n أي $n=k , k \geq 1$ فهي كذلك صحيحة عند $n = k + 1$

وبواسطة الاستقراء الرياضي فان المبرهنة تعتبر صحيحة لجميع قيم n .

مثال - 27 -

احسب $(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$

الحل :

$$(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) = -i$$

مثال- 28-

بين انه لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فان:

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

الحل :

الطرف الايسر

$$LHS = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos\theta + (-i\sin\theta)]^n$$
$$= [(\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n$$
$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$

وبجعل $\phi = -\theta$ تصبح العلاقة

$$= [\cos\phi + i\sin\phi]^n$$
$$= \cos n\phi + i\sin n\phi$$
$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

الطرف الايمن

$$= RHS$$ (و . هـ . م)

نتيجة لمبرهنة ديموافر :

لكل $\theta \in R$, $n \in Z^+$ فان

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

مثال- 29-

احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

الحل:

$z = 1 + i$

$$\mod z = \sqrt{2}, \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \therefore \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore (1+\mathbf{i})^{11}=(\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{11\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{11\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{5}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{5}(-1+\mathrm{i})=32(-1+\mathrm{i})$$

ملاحظة

$$(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^{-1}=[\cos(-\theta)+\mathbf{i}\sin(-\theta)]=(\cos\theta-\mathbf{i}\sin\theta)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الاتي :

$$\boxed{(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-\mathbf{i}\sin n\theta}$$

مثال -30- حل المعادلة

$x^3+1=0$ حيث $x\in\mathbb{C}$

الحل :

$x^3+1=0 \Rightarrow$

$x^3=-1$

$x^3=\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi$

$$\therefore x=(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}$$

حيث $k=0,1,2$

لانه جذر تكعيبي

بوضع $k=0$ يكون

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بوضع $k=1$ يكون

$$x_2 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$= -1 + i(0)$$

$$x_2 = -1$$

بوضع $k=2$ يكون

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اذاً مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \ -1 \ , \ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

مثال -31-

اوجد الصيغة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

الحل :

ليكن $z = \sqrt{3} + i$ نضع z بالصيغة القطبية:

$$\|z\| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ، \ \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6})^2$$

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$= \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$ لانه جذر خامس

وبوضع $k=0$ يكون

$$Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

وبوضع $k=1$ يكون

$$Z_2 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + \mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=2$ يكون

$$Z_3 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + \mathbf{i}\sin\frac{13\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=3$ يكون

$$Z_4 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + \mathbf{i}\sin\frac{19\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=4$ يكون

$$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + \mathbf{i}\sin\frac{25\pi}{15}\right]$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

تمارين

1. احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

b) $\left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

2. احسب باستخدام مبرهنة ديموافر (او التعميم)ما يأتي:

a) $(1-i)^7$ b) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

3. بسط ما يأتي:

a) $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$ b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$\boxed{\text{Hint: } x^4y^4 = (xy)^4}$

4. جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}\,i$ بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضة في البند [4-1].

5. بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$.

6. جد الجذور الاربعة للعدد (-16) بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

7. جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.