3

الفصل الثالث

Chapter Three

تطبيقات التفاضل

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
التغير التقريبي عند a	$hf'(a),\ h=b-a$

تمهيد : لقد سبق أن تعلمت في الصف الخامس العلمي متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق وتعرفت على قواعد ايجاد مشتقات الدوال الجبرية والدائرية والتفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة وفي هذا الفصل سنتناول بعض المفاهيم الاخرى وبعض استعمالات وتطبيقات حساب التفاضل

[3-1] المعدلات المرتبطة Related Rates

إذا وجد أكثر من متغير بحيث تتوقف قيمة كل من هذه المتغيرات على متغير واحد يسمى (بارامتر) ومثاله الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعاً لتغيره وحيث أن العلاقة هي ارتباط فإننا نسمي المعدلات الزمنية هذه بالمعدلات الزمنية المرتبطة واحياناً بالمعدلات المرتبطة أو المعدلات الزمنية فقط، فمثلاً اذا كان

$$y = g(t), x = f(t)$$

فالمتغيران x, y متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل t، فمن الممكن ربط المتغيرين ببعضهما، ويمكن أن نجد معدل تغير كل منهما وكما يأتي: $\frac{dx}{dt} = f'(t), \frac{dy}{dt} = g'(t)$ والناتجان يمثلان المعدلين الزمنيين لتغير كل من y, x

وقد يتوافر الربط بين المتغيرين في مسألة ما بمعادلة وفي هذه الحالة نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t فعلى سبيل المثال من المعادلة $x^2+y^2-4y+6x=0$ يمكن ايجاد المعدل الزمني لتغير كل من x, y وكما يلي:

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2-4y+6x) = \frac{d}{dt}(0) \Rightarrow$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 6\frac{dx}{dt} = 0$$

فيكون: المعدل الزمني لتغير y يساوي $\frac{dy}{dt}$

والمعدل الزمني لتغير x يساوي $\frac{dx}{dt}$

ملاحظة لحل أي سؤال يتعلق بالمعدلات المرتبطة حاول إتباع ما يلي إن أمكن:

1) ارسم مخططاً للمسألة (أن احتجت الى ذلك) وحدد المتغيرات والثوابت وضع لها الرموز وحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال.

2) حاول إيجاد علاقة أخرى بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات.

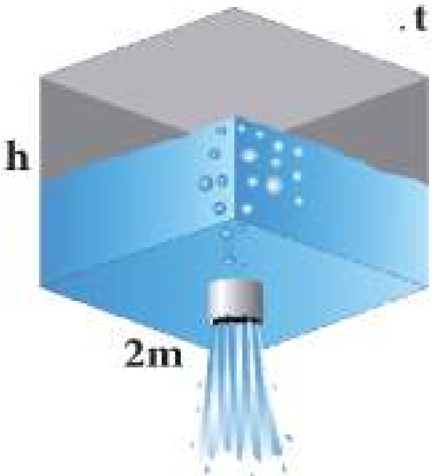
3) نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير (الزمن) t.

4) عوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الاشتقاق.

والامثلة التالية توضح ذلك:

مثال -1-

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t .



الحل

ليكن حجم الماء في الخزان عند أي زمن t هو $v(t)$

(تسرب) $\Leftarrow \frac{dv}{dt} = -0.4$ (الاشارة السالبة تعني نقصان)

وليكن ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن هو h والمطلوب إيجاد $\frac{dh}{dt}$

أن الماء يأخذ شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة

$\therefore V = Ah \quad , \quad A =$ مساحة القاعدة

$V = (2)(2)h \Rightarrow V = 4h$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$

$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1 \ m/s$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان $0.1 m/s$

مثال -2-

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$. يتمدد طولها بمعدل $2cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8cm .

الحل

في أية لحظة ما نفرض طول المستطيل = x

وعرض المستطيل = y

$\frac{dx}{dt} = 2cm/s$ معدل تغير الطول

$\frac{dy}{dt}$ معدل تغير العرض =?

$$A = xy$$

$\therefore \quad 96 = xy.$

$\because \quad y = 8 \Rightarrow x = 12$

$$\frac{d}{dt}(96) = \frac{d}{dt}(xy)$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة الى t

$$0 = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$$

$$0 = 12\frac{dy}{dt} + 8(2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3} \text{ cm/s}$$

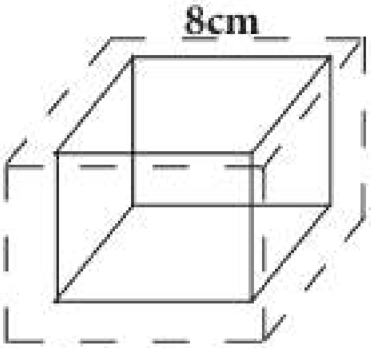
$\therefore$ العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3}$ cm/s في تلك اللحظة

مثال- 3- مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1cm .

الحل

نفرض سمك الجليد في أية لحظة = x والمطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما x=1

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد- حجم المكعب الأصلي



$$V = (8 + 2x)^3 - 8^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2(2)\frac{dx}{dt} - 0$$

وبالتعويض عن القيم المعطاة نحصل على:

$$-6 = 3(8+(2)(1))^2.2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -0.01 \text{ cm/s}$$

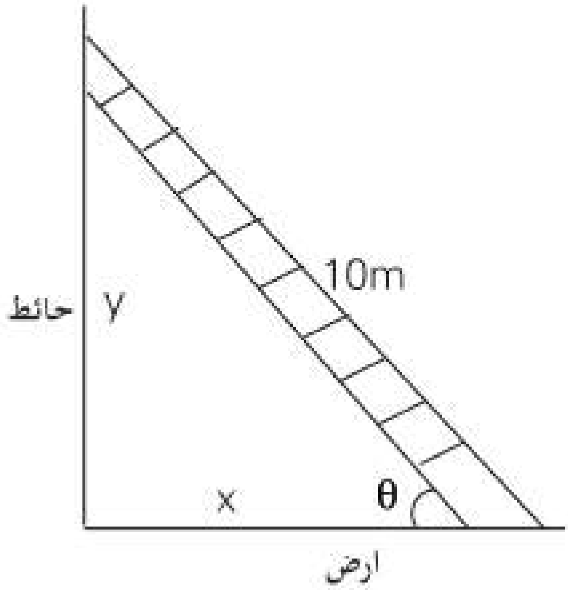
$\therefore$ معدل نقصان سمك الجليد = 0.01cm/s

مثال - 4-

سلم طوله 10m يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m / s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m عن الحائط جد :

1) معدل انزلاق الطرف العلوي .

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض .



الحل

نفرض عند أية لحظة :

بعد الطرف الاسفل عن الحائط = x , $\frac{dx}{dt}=2$

بعد الطرف الأعلى عن الأرض =y .

قياس الزاوية بين السلم والأرض = θ (نصف قطرية)

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس نحصل على :

1) $x^2+y^2=100$

$\because \quad x=8 \Rightarrow y=6$

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=\frac{d}{dt}(100) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

وبالتعويض عن القيم المعلومة نحصل على :

$$(2)(8)(2)+(2)(6)\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-8}{3}\ m/s$$

معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{8}{3}\ m/s$

2) $\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sin\theta) = \frac{d}{dt}(\frac{y}{10}) \Rightarrow \cos\theta\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$

وبالتعويض عن $\cos\theta = \frac{x}{10}$ ينتج $\frac{x}{10}\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$

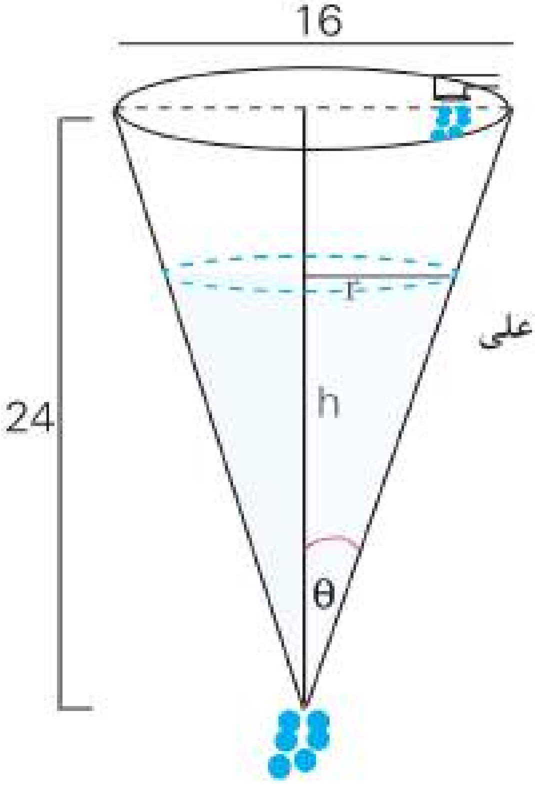
ومن التعويض بقيمة $x=8$ وعن قيمة $\frac{-8}{3} = \frac{dy}{dt}$ نحصل على :

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = (\frac{1}{10})(\frac{-8}{3})$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\,rad/s$$ سرعة تغير الزاوية

مثال- 5-

مرشح مخروطي قاعدته أُفقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm .



الحل

نفرض بعدي المخروط المائي

(نصف القطر= r والارتفاع= h) عند أية لحظة

نفرض حجم السائل عند أية لحظة v(t)

في الشكل المجاور من استعمال $\tan\theta$ أو من تشابه مثلثين نحصل على

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow$$

$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$ نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt}....(1)$$

معدل تغير حجم السائل في المخروط =معدل الصب –معدل التسرب .

$$\frac{dv}{dt}=5-1=4\ cm^3/s$$

وبالتعويض في (1) ينتج

$$4=\frac{1}{9}\pi(12)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}cm/s$$

مثال -6-

لتكن **M** نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2unit/s$ ، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة **M** عندما يكون $x=4$.

الحل

لتكن $M(x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

$$S=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}\Rightarrow S=\sqrt{x^2-14x+49+y^2}$$

وبالتعويض عن $y^2=4x$ ينتج

$$\Rightarrow S=\sqrt{x^2-10x+49}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}.\frac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\quad 0.2=\frac{8-10}{10}.\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{dt}=-1unit/s$$

تمارين

1 . سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فاذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2m/s$ ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

2 . عمود طوله $7.2m$ في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله $1.8m$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $30m/min$ ، جد معدل تغير طول ظل الرجل.

3 . لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ ،جد احداثيي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

4 . جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t .

5 . متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3cm/s$ ،وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5cm/s$ ،جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4cm$ والارتفاع $3cm$.

[3-2] مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة Rolles and Mean Value Theorems

قبل أن نتعرف في هذا البند الى مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نذكر بعض التعاريف والمبرهنة التي تمهد لهاتين المبرهنتين: (للاطلاع)

تعريف (3-2-1)

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن:

1) f تأخذ قيمة عظمى عند C حيث $C \in [a,b]$ اذا وفقط اذا $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

2) f تأخذ قيمة صغرى عند C حيث $C \in [a,b]$ اذا وفقط اذا $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

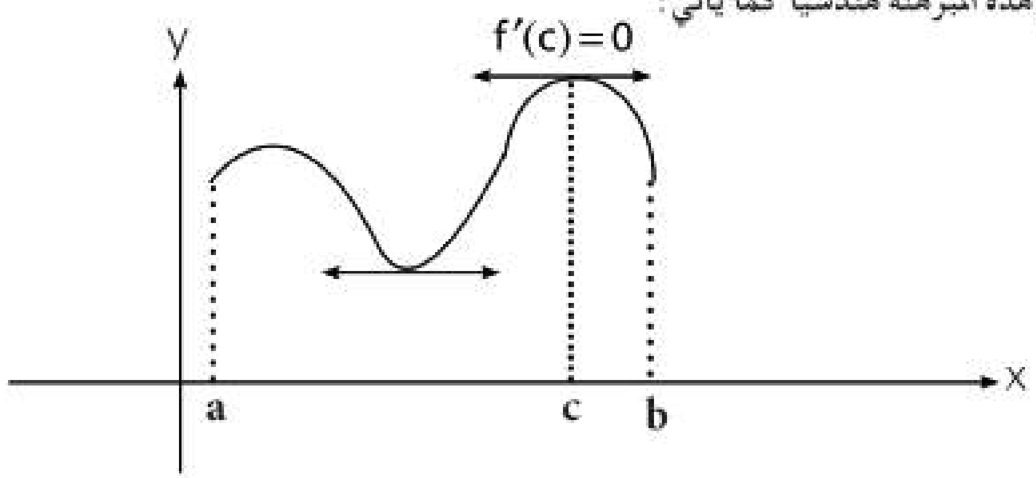
مبرهنة (3-2-2)

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان:

للدالة f قيمة عظمى أو صغرى عند c حيث $c \in (a,b)$ وأن $f'(c)$ موجودة

فان $f'(c)=0$

وسنكتفي بتوضيح هذه المبرهنة هندسياً كما يأتي:



عند النقطة c المختلفة عن a,b والتي تأخذ عندها الدالة قيمة عظمى أو صغرى يكون المماس للمنحني البياني للدالة افقياً (اي موازي لمحور السينات)

والان يمكن أن تفكر في اجابة للسؤال الاتي :

اذا كان للدالة f قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند c حيث $c \in (a,b)$ فهل يشترط أن يكون $f'(c)=0$ ؟

وللاجابة على السؤال اليك المثال الاتي :

مثال -1-

لتكن $f:[-1,1] \rightarrow R, f(x)=|x|$

وكما تلاحظ في الشكل أدناه فإن

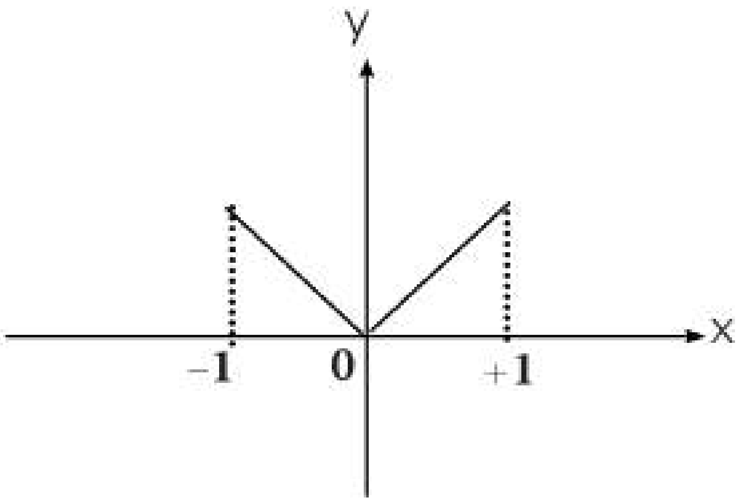
الدالة f تمتلك اعظم قيمة عند كل من $x=-1$ ، $x=1$

وتمتلك اصغر قيمة عند $x=0$

وانت تعلم من دراستك السابقة أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

اي ان $f'(0)$ غير موجودة .

$\therefore$ لا يشترط أن يكون $f'(c)=0$



تعريف (3-2-3)

لتكن الدالة f معرّفة عند العدد c . يقال عن العدد c بأنه عدد حرج (**Critical Number**) اذا كان $f'(c)=0$ او ان الدالة غير قابلة للاشتقاق في c وتسمى النقطة ($c, f(c)$) بالنقطة الحرجة

ففي المثال السابق : $f:[-1,1] \rightarrow R \ni \quad f(x)=|x|$

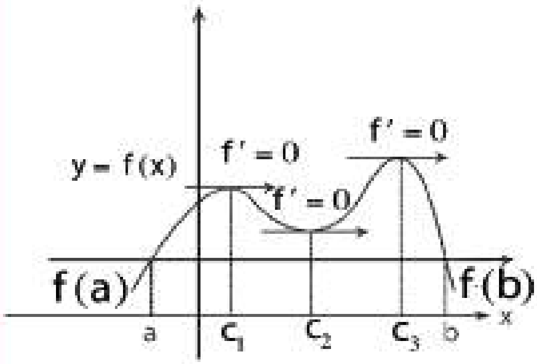
تلاحظ أن الدالة معرفة عند صفر ، وان $f'(0)$ غير موجودة

لذا يقال أن العدد "صفر" هو العدد الحرج للدالة f وان النقطة $(0, f(0))$ هي النقطة الحرجة .

Rolle's Theorem مبرهنة رول

مبرهنة رول : لقد وضع العالم الفرنسي (متشل رول) مبرهنة مبسطة لإيجاد نقط تمثل نقطاً حرجة للدالة في الفترة المعطاة وسميت هذه المبرهنة باسمه .

(3-2-4) مبرهنة رول Rolle's Theorem



إذا كانت الدالة f :

1) مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$

2) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)

3) $f(b)=f(a)$

فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a,b) وتحقق : $f'(c)=0$

مثال -2- بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ وجد قيمة c الممكنة :

a) $f(x)=(2-x)^2 \quad , \quad x\in[0,4]$

b) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x\in[-1,1]$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\in[-1,2] \\ -1 & , \quad x\in[-4,-1) \end{cases}$

d) $f(x)=k \quad , \quad x\in[a,b]$

a) $f(x)=(2-x)^2 , x\in[0,4]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثالث : $f(0)=(2-0)^2=4$

$f(4)=(2-4)^2=4 \quad \Rightarrow \quad f(0)=f(4)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول .

$f'(x)=-2(2-x)$

$f'(c)=-2(2-c)$

$f'(c)=0 \Rightarrow -2(2-c)=0$

$\therefore c=2 \in (0,4)$

b) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x \in [-1,1]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثالث : $f(-1)=-9+3+1=-5$

$f(1)=9+3-1=11 \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$

لاتتحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق .

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x \in [-1,2] \\ -1 & x \in [-4,-1) \end{cases}$

الحل

مجال الدالة = $[-4,2]$

الشرط الاول :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to (-1)^+} (x^2+1)=2=L_1 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} (-1)=-1=L_2 \end{cases}$$

الدالة لسيت مستمرة لأن $L_1 \neq L_2$ في الفترة $[-4,2]$

$\therefore$ لا تحقق مبرهنة رول

d) $f(x)=k \quad , \quad x \in [a,b]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على $[a,b]$ لانها دالة ثابتة .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) .

الشرط الثالث : $f(a)=f(b)=k$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول . وان قيمة c يمكن ان تكون اي قيمة ضمن الفترة (a,b) .

The Mean Value Theorem مبرهنة القيمة المتوسطة [3-2-5]

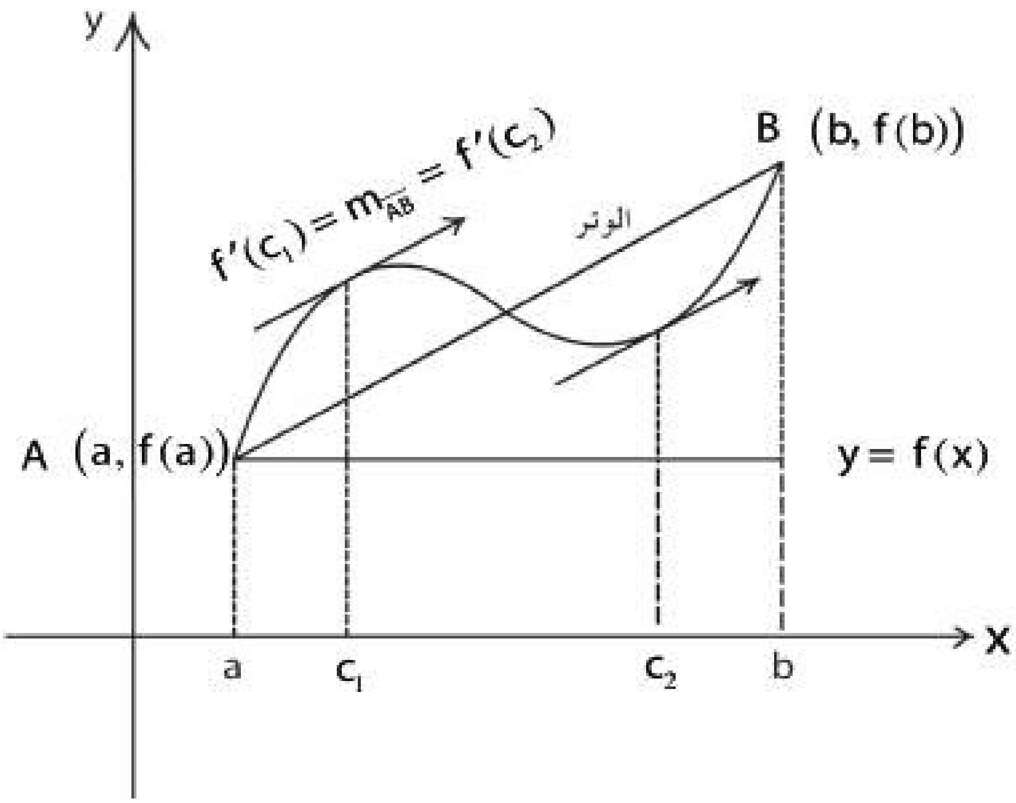
إذا كانت **f** دالة مستمرة في الفترة المغلقة [**a,b**] وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (**a,b**)

فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c ينتمي الى (**a,b**) وتحقق : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

او $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة :

المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$



ميل الوتر المار بالنقطتين **A,B** يساوي $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الاولى للدالة **f** عند c , ($f'(c)$)

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ملاحظة

أن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو : $f(a)=f(b)$

أي أن الوتر والمماس يوازيان محور السينات

أي فرق الصادات =0 لذا يصبح الميل =0 فنحصل على : $f'(c)=0$

مثال- 3-

برهن ان الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c:

$$a)\ f(x)=x^2-6x+4,\ x\in[-1,7]$$

$$b)\ f(x)=\sqrt{25-x^2},\ x\in[-4,0]$$

الحل

$$a)\ f(x)=x^2-6x+4\ ,\ x\in[-1,7]$$

الشرط الأول يتحقق : الدالة مستمرة في الفترة $[-1,7]$ لأنها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني يتحقق : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,7)$ لانها دالة كثيرة الحدود.

ميل المماس

$$f'(x)=2x-6\Rightarrow f'(c)=2c-6$$

ميل الوتر

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(7)-f(-1)}{7+1}=\frac{11-11}{8}=0$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$0=2c-6\Rightarrow c=3\in(-1,7)$$

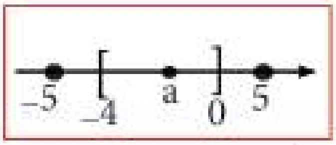
b) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ ، $x\in[-4,0]$

الحل

مجال f = مجموعة حل المتباينة $25-x^2\geq 0$ اي $[-5,5]$

(1) استمرارية f في $[-4,0]$: نثبت الاستمرارية اولاً في الفترة المفتوحة $I=(-4,0)$ بعدها عن طرفي الفترة .

لتكن $a\in I \Leftarrow f(a)=\sqrt{25-a^2}\in R$ لان a ضمن مجال الدالة



$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-a^2}\Rightarrow f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

∴ مستمرة في $(-4,0)$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x)=\lim_{x\to -4^+}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=3=f(-4)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-0}=5=f(0)$$

∴ f مستمرة عند طرفي الفترة $[-4,0]$ ⇐ f مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

(2) قابلية الاشتقاق : مجال f' = (-5.5) ⇐ f قابلة للاشتقاق في الفترة $(-4,0)$ لانها محتواة كلياً في مجال مشتقة f

(3) ميل المماس

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\Rightarrow f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

ميل الوتر

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(0)-f(-4)}{0+4}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$$

ميل المماس = ميل الوتر

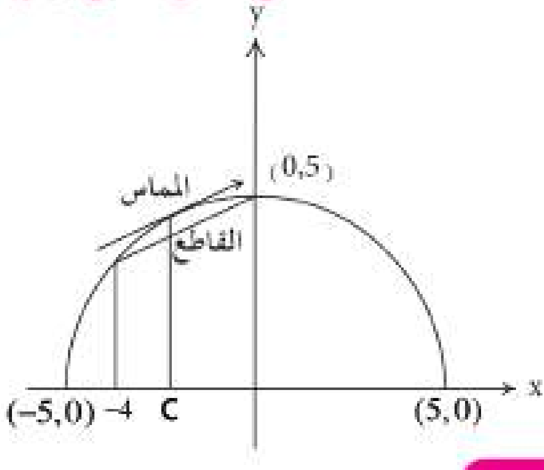
$$\frac{1}{2}=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$$\sqrt{25-c^2}=-2c \Rightarrow$$

$$25-c^2=4c^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$$

$c=\sqrt{5}\notin(-4,0)$

$c=-\sqrt{5}\in(-4,0)$



مثال -4-

اذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ ، $f:[0,b]\to R$

وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة b .

الحل

ميل المماس $f'(x)=3x^2-8x \Rightarrow f'(c)=3c^2-8c \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=-4$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{b^3-4b^2-0}{b}=b^2-4b$

ميل المماس = ميل الوتر

$\therefore b^2-4b=-4 \Rightarrow b^2-4b+4=0 \Rightarrow (b-2)^2=0 \Rightarrow b=2$

[3-2-6] نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في (a,b) ولو اعتبرنا $h=b-a$ فأن $b=a+h$ حيث $h\neq 0, h\in R$ فانه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على :

$$f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\Rightarrow f(a+h)=f(a)+hf'(c)$$

وعندما يكون اقتراب b من a قرباً كافياً تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من a أي أن المماس عند c سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جداً من النقطة حيث $x=a$ ولذلك يصبح :

$$f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$$

يقال للمقدار $hf'(a)$ التغير التقريبي للدالة.

التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

ملاحظة :- سوف نقتصر في حل تمارين التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة فقط

مثال- 5- جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسباً للعدد $\sqrt{26}$

الحل

لتكن

$y = f(x) = \sqrt{x}$ ... الدالة $x \geq 0$

نفرض $a = 25$ (اقرب مربع كامل من العدد 26)

$\boxed{h = b - a = 1}$

$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = \dfrac{1}{10} = 0.1$

$b = 26$

$a = 25$... القيمة السهلة

$h = 1 = b - a$

ومن النتيجة :

$$f(b) \cong f(a) + (b-a)f'(a)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

$$\sqrt{26} = f(25+1) \cong f(25) + (1)f'(25)$$

$$\therefore \sqrt{26} \cong 5 + 1 \times (0.1) = 5.1$$

مثال -6-

اذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل

$$f(1)=1+3+4+5=13$$
$$f'(x)=3x^2+6x+4$$
$$f'(1)=3+6+4=13$$
$$f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$$
$$f(1.001)=f(1)+(0.001)f'(1)$$
$$=13+(0.001)(13)$$
$$=13.013$$

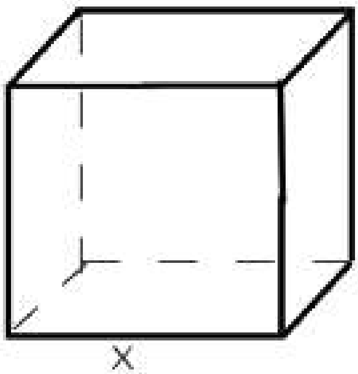
$b=1.001$
$a=1$
$h=b-a=0.001$

مثال -7-

مكعب طول حرفه 9.98cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

ليكن V حجم المكعب الذي طول حرفه (X)



$b=9.98$
$a=10$
$h=b-a=-0.02$

اي ان الدالة تكون على الصيغة

$$v(x)=x^3$$
$$x\in[9.98,10]$$
$$v(10)=10^3=1000$$
$$v'(x)=3x^2 \Rightarrow v'(10)=3(10)^2=300$$
$$v(9.98)\cong 1000+(-0.02)(300)\cong 994\ cm^3$$

مثال -8- لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت **x** من **8** إلى **8.06** فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

الحل

الدالة : $f:[8,8.06]\to R\ ,\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$b = 8.06$
$a = 8 = 2^3$
$h = b - a = 0.06$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$f'(a)=f'(8)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{3}=0.333$$

التغير التقريبي $hf'(8)\cong(0.06)\ \dfrac{1}{3}\ =\ 0.02$

مثال -9- يراد طلاء مكعب طول ضلعه **10cm** فاذا كان سمك الطلاء **0.15cm** اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل

$b = 10.3$
$a = 10$
$h = b - a = 0.3$

$v(x)=x^3$
$v'(x)=3x^2$
$v'(a)=v'(10)=(3)(10)^2=300$
حجم الطلاء بصورة تقريبية $hv'(10)\cong(0.3)(300)=90cm^3$

مثال 10

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الاقل كلاً من:

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$　　b) $\sqrt[3]{7.8}$

c) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$　　d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

الدالة: $f(x)=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3$

المشتقة: $f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$

تعويض بالدالة: $f(a)=f(1)=1^{\frac{3}{5}}+1^4+3=5$

تعويض بالمشتقة: $f'(a)=f'(1)=\left(\frac{3}{5}\right)(1)^{\frac{-2}{5}}+(4)(1)^3=4.6$

تعويض بالقانون

b = 0.98 a = 1 h = b−a = −0.02

$$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$$
$$f(0.98)=f(1)+(-0.02).f'(1)$$
$$f(0.98)=5+(-0.02).(4.6)$$
$$f(0.98)=5-0.092=4.908$$
$$\therefore\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3\cong 4.908$$

b) $\sqrt[3]{7.8}$

الحل

الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b = 7.8 a = 8 = 2^3
h = b − a = −0.2

التعويض بالدالة : $f(a)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$

التعويض بالمشتقة : $f'(a)=f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}=0.083$

وبالتعويض بالقانون : $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$ نحصل على

$$f(7.8)=f(8)+(-0.2)f'(8)\cong 2-(0.2)(0.083)$$
$$=2-0.0166=1.9834$$
$$\therefore \sqrt[3]{7.8}\cong 1.9834$$

c) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

الحل

الدالة : لتكن $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

b = 17 a = 16
h = b − a = 17 − 16 = 1

تعويض بالدالة : $f(16)=(2^4)^{\frac{1}{2}}+(2^4)^{\frac{1}{4}}=4+2=6$

تعويض بالمشتقة :

$$f'(16)=\frac{1}{2}(2^4)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}(2^{-2})+\frac{1}{4}(2^{-3})=0.5\left(\frac{1}{2}\right)^2+0.25\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f'(16) = (0.5)(0.5)^2 + (0.25)(0.5)^3 = (0.5)(0.25) + (0.25)(0.125)$$
$$= 0.125 + 0.031 = 0.156$$

التعويض بالقانون نحصل على

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$
$$f(17) \cong f(16) + (1)f'(16)$$
$$f(17) \cong 6 + (1)(0.156)$$
$$\therefore \sqrt{17} + \sqrt[4]{17} \cong 6.156$$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

الدالة $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

تعويض بالدالة $f(0.125) = \left((0.5)^3\right)^{\frac{1}{3}} = 0.5$

تعويض بالمشتقة $f'(0.125) = \frac{1}{3}\left[(0.5)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{3}(2)^2 = \frac{4}{3} = 1.333$

وبالتعويض بالقانون نحصل على :

b = 0.120
a = 0.125
h = b − a = −0.005

$$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$$
$$f(0.12) \cong f(0.125) + (-0.005).(1.333)$$
$$f(0.12) \cong 0.5 - 0.006665$$
$$f(0.12) \cong 0.493335$$
$$\therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.493335$$

تمارين

1. اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f(x)=x^3-9x \quad ,x\in \quad [-3,3]$

b) $f(x)=2x+\frac{2}{x} \quad ,x\in \quad \left[\frac{1}{2},2\right]$

c) $f(x)=(x^2-3)^2 \quad ,x\in \quad [-1,1]$

2. جد تقريباً لكل مما يلي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$ b) $(1.04)^3+3(1.04)^4$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ d) $\frac{1}{101}$ e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. كرة نصف قطرها **6cm** طليت بطلاء سمكه **0.1cm** جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

4. كرة حجمها $84\pi \ \ cm^3$، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة.

5. مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي **2.98cm** فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطه.

6. بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c :

a) $f(x)=(x-1)^4 \quad ,[-1,3]$

b) $h(x)=x^3-x \quad ,[-1,1]$

c) $g(x)=x^2-3x \quad ,[-1,4]$

d) $f(x)=\cos 2x+2\cos x \quad ,[0,2\pi]$

7. اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاءها مع ذكر السبب وإن تحققت المبرهنة، جد قيم c الممكنة.

a) $f(x)=x^3-x-1 \quad ,[-1,2]$

b) $h(x)=x^2-4x+5 \quad ,[-1,5]$

c) $g(x)=\frac{4}{x+2} \quad ,[-1,2]$

d) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2} \quad ,[-2,7]$

[3-3] اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الاولى.

The First Derivative Test For Increasing And Decreasing of a Function

[3-3-1] نتيجة

ان من النتائج المهمه لمبرهنة القيمة المتوسطة هي النتيجة الاتية :

لتكن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فإذا كانت

$$1)\ f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \begin{pmatrix} \text{Increasing} \\ \text{متزايدة} \end{pmatrix}$$

$$2)\ f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \begin{pmatrix} \text{Decreasing} \\ \text{متناقصة} \end{pmatrix}$$

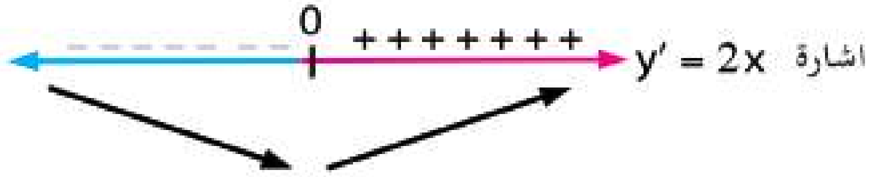
أما بقية الحالات فسوف لانتطرق لها في هذه المرحلة.

مثال -1- لتكن $y = f(x) = x^2$. جد مناطق التزايد والتناقص

الحل

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$



$\because f'(x) > 0, \forall x > 0$

$\therefore \{x : x > 0\}$ متزايدة في f

$\because f'(x) < 0, \forall x < 0$

$\therefore \{x : x < 0\}$ متناقصة في f

مثال- 2-

جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الاتيتين:

a) $f(x)=9x+3x^2-x^3$ b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

الحل

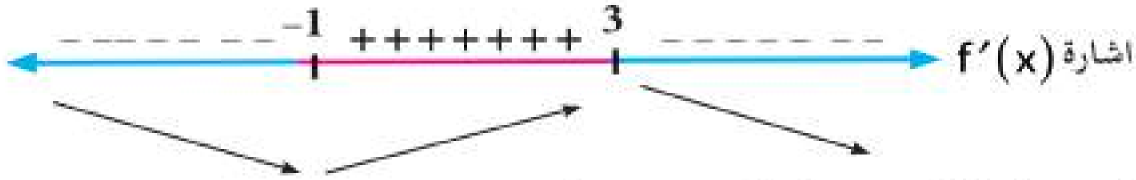
a) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \Rightarrow f'(x)=9+6x-3x^2$

$0=9+6x-3x^2$

$0=-3(x^2-2x-3)$

$0=(x-3)(x+1) \Rightarrow x=3, x=-1$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين : $x=3, x=-1$



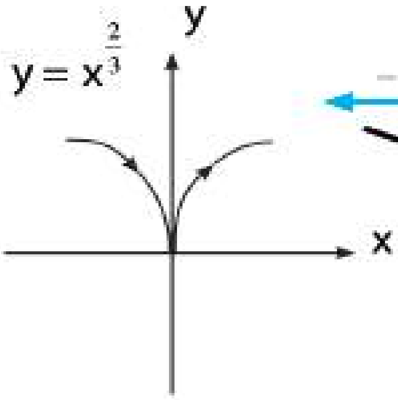
f متناقصة : في $\{x:x<-1\},\{x:x>3\}$

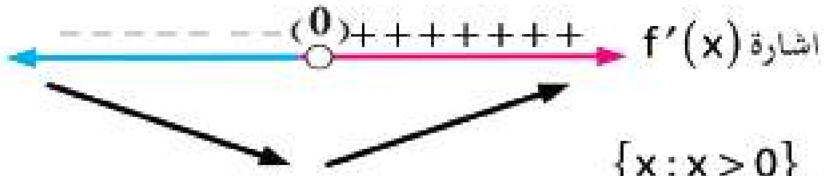
f متزايدة : في الفترة المفتوحة $(-1,3)$

الحل

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ غير معرفه اذا كانت $x=0$, اي $x=0$ عدد حرج





f متزايدة في $\{x:x>0\}$

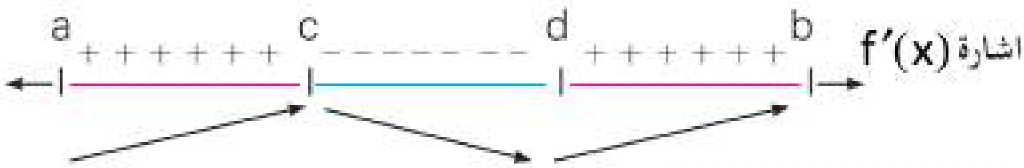
f متناقصة في $\{x:x<0\}$

[3-4] النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية

لاحظ في الشكل أدناه أن الدالة $y = f(x)$ متزايدة على الفترة (a,c) لأن $f'(x) > 0$ ، ومتناقصة على الفترة (c,d) لأن $f'(x) < 0$ ثم تتزايد في الفترة (d,b) .

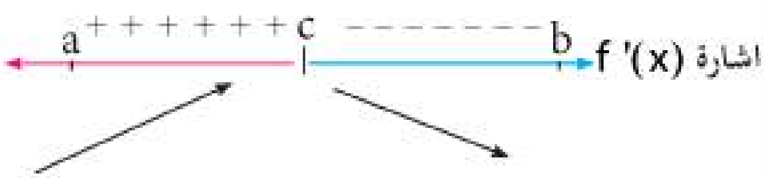
كما أن $f' = 0$ عند كل من $x=c$, $x=d$

تسمى نقطة $(c, f(c))$ نقطة نهاية عظمى محلية وإن $f(c)$ هي النهاية العظمى المحلية (**Local Maximum**) وتدعى النقطة $(d, f(d))$ نقطة نهاية صغرى محلية وان $f(d)$ هي النهاية الصغرى المحلية (**Local Minimum**)



تعريف [3-4-1]

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عند $x=c$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a,b) فاذا كانت :

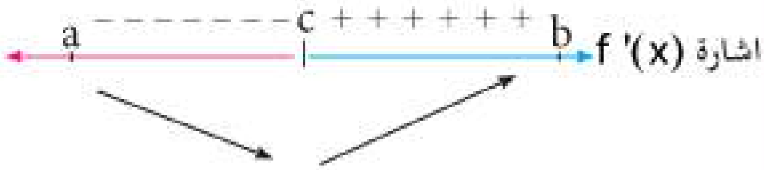


1) $f'(x) < 0; \forall x \in (c,b)$

$f'(x) > 0; \forall x \in (a,c)$

$f'(c) = 0$

فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية



2) $f'(x) > 0; \forall x \in (c,b)$

$f'(x) < 0; \forall x \in (a,c)$

$f'(c) = 0$

فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية

ملاحظة

لكي نختبر القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة f بواسطة المشتقة الاولى للدالة f نتبع الخطوات الاتية :

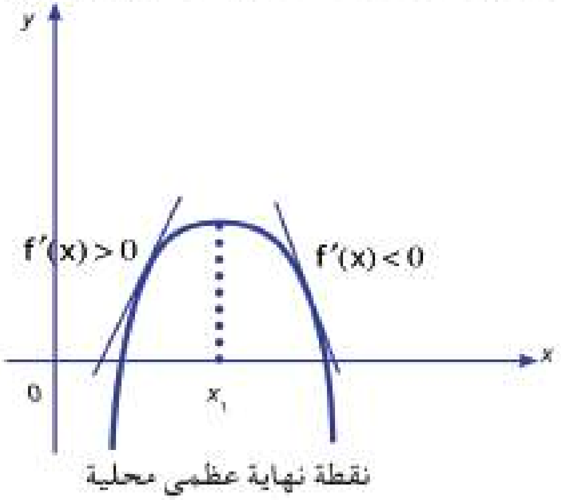
- نجد الاعداد الحرجة وذلك بحل المعادلة $f'(x)=0$ * وليكن $x=x_1$ هو أحد هذه الأعداد الحرجة
- نختبر إشارة $f'(x)$ بجوار $x=x_1$ فاذا كانت إشارة $f'(x)$ موجبة $\forall x<x_1$ وسالبة $\forall x>x_1$

فهذا يعني أن النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية عظمى محلية

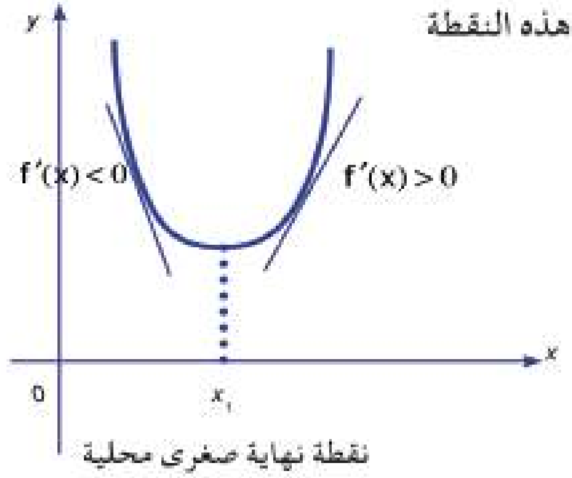
أما إذا كانت اشارة $f'(x)$ سالبة $\forall x<x_1$ وموجبة $\forall x>x_1$

فهذا يعني أن $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية صغرى محلية

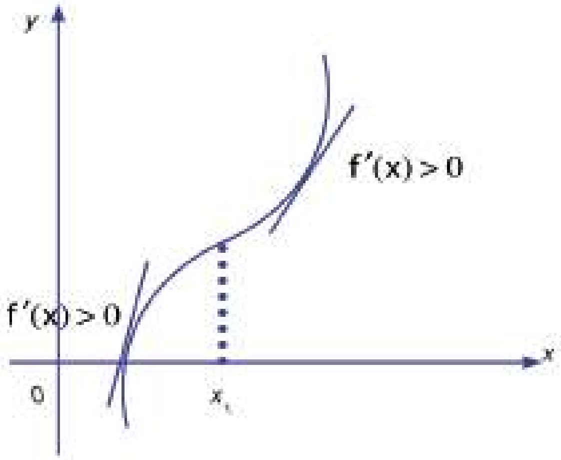
أما إذا كانت اشارة $f'(x)$ لاتغير قبل وبعد x_1 فلا يكون للدالة نقطة نهاية عظمى ولاصغرى عند هذه النقطة

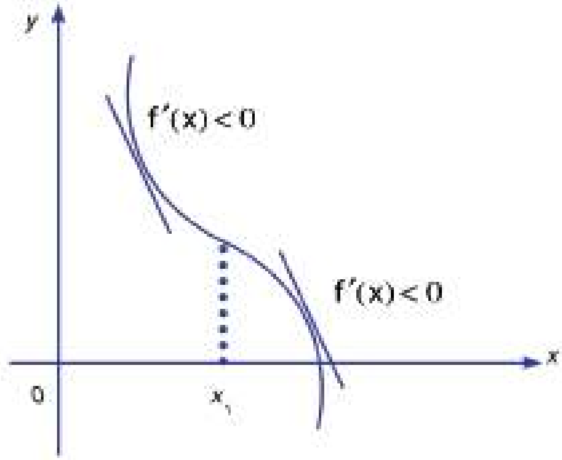


نقطة نهاية عظمى محلية



نقطة نهاية صغرى محلية





لا توجد نهايات

* سنقتصر في بحثنا على الدوال القابلة للاشتقاق .

مثال -3-

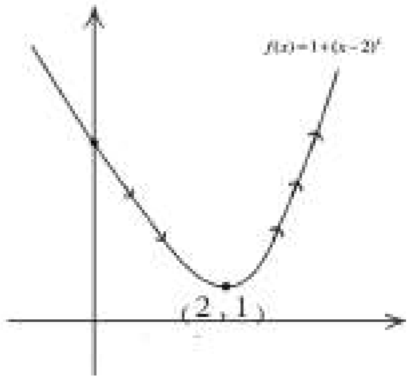
جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها اذا علمت أن :

$a)\ f(x)=1+(x-2)^2$

$b)\ f(x)=1-(x-2)^2$

$c)\ f(x)=x^3-9x^2+24x$

الحل

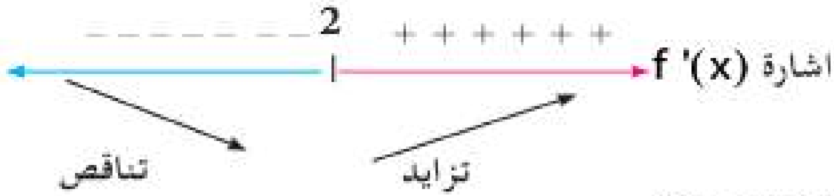


$a)\ f(x)=1+(x-2)^2$

$\Rightarrow f'(x)=2(x-2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$f(2)=1+(2-2)^2=1$



f متزايدة في $\{x : x>2\}$

f متناقصة في $\{x : x<2\}$

$\therefore$ النقطة $(2\ ,\ f(2))=(2,1)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .

$b)\ f(x)=1-(x-2)^2$

$\Rightarrow f'(x)=-2(x-2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

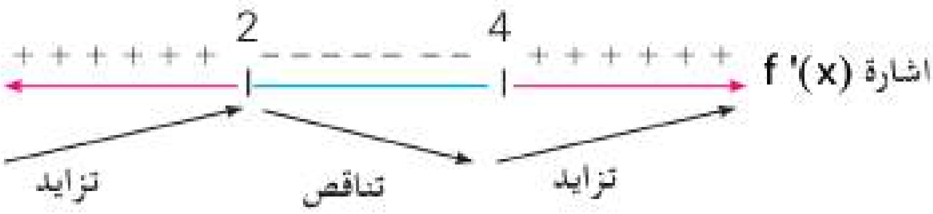
$f(2)=1-(2-2)^2=1$

f متزايدة في $\{x : x < 2\}$
f متناقصة في $\{x : x > 2\}$

$\therefore$ النقطة $(2,1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى المحلية

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$
$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

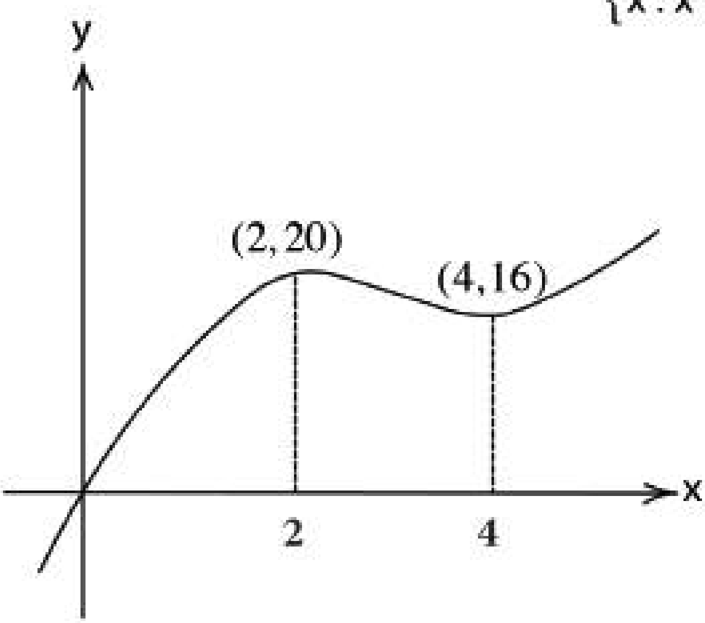
$f'(x) = 0$
$\Rightarrow 3(x^2 - 6x + 8) = 0$
$\Rightarrow 3(x-4)(x-2) = 0$
$\Rightarrow x = 4 \quad , \quad x = 2$
$f(4) = 16 \quad , \quad f(2) = 20$



f متزايدة في $\{x : x > 4\}$, $\{x : x < 2\}$

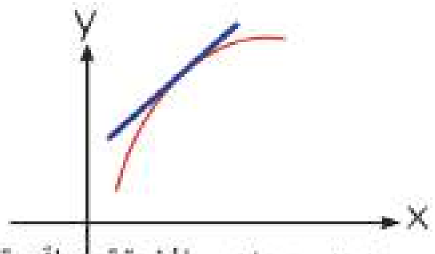
f متناقصة في الفترة المفتوحة $(2,4)$

نقطة النهاية العظمى المحلية $(2,20)$
نقطة النهاية الصغرى المحلية $(4,16)$



[3-5] تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب

منحني مقعر والمشتقة متزايدة
(A)



منحني محدب والمشتقة متناقصة
(B)

تعريف [3-5-1]

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فيقال عن الدالة f بأنها محدبة اذا كانت f' متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت f' متزايدة خلال تلك الفترة.

ملاحظة

المنحني مقعر في (a,b) (Concave up) ⟺ المنحني يقع فوق جميع مماساته في (a,b)

والمنحني محدب في (a, b) (Concave down) ⟺ المنحني يقع تحت جميع مماساته في (a,b) لاحظ الشكلين (B) ، (A)

مبرهنة [3-5-2]

اذا كانت f معرفة في [a,b] ولها مشتقة أولى وثانية على (a,b) فإنها تكون مقعرة على (a,b) اذا حققت الشرط الآتي :

$$f''(x) > 0 \quad \text{لكل} \quad x \in (a,b)$$

تكون محدبة على (a,b) اذا حققت الشرط الآتي :

$$f''(x) < 0 \quad \text{لكل} \quad x \in (a,b)$$

مثال – 1 –

إدرس تقعر وتحدب كل من الدالتين :

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

الحل

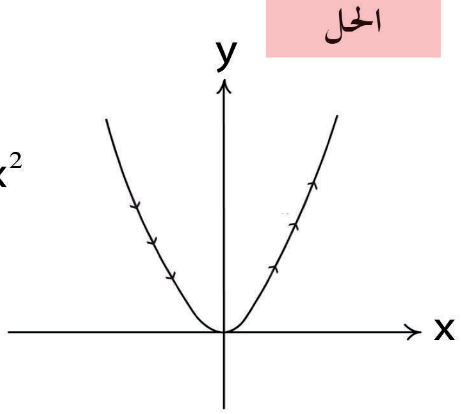
a) $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$\therefore f''(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow$ الدالة **f** مقعرة على **R**

$y = x^2$



b) $f(x) = x^3$

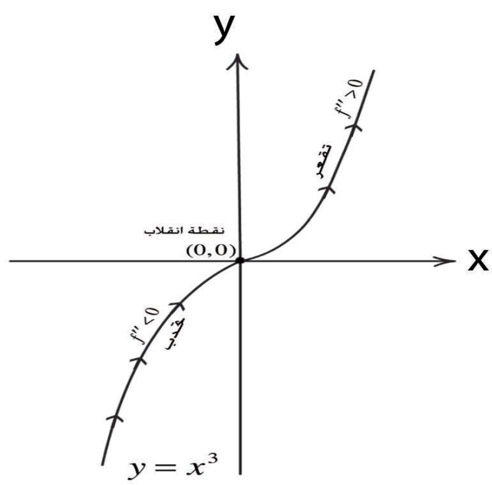
$f'(x) = 3x^2$

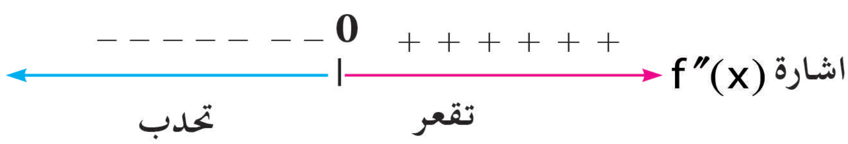
$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$

$\therefore x = 0$

$f(0) = 0$





f محدبة في $\{x : x<0\}$ **f** مقعرة في $\{x : x>0\}$

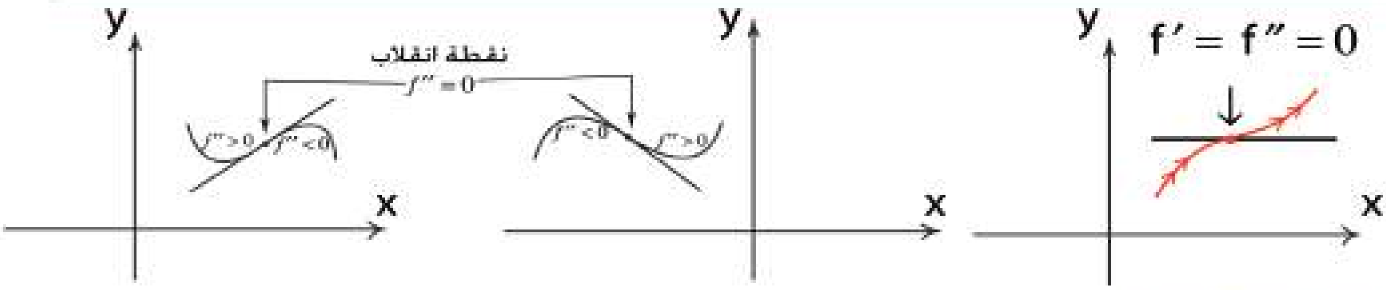
في هذا المثال (**b**) لاحظ أن المنحني في $\{x : x<0\}$ محدب وفي $\{x : x>0\}$ مقعر .

أي قبل النقطة $(0, f(0)) = (0,0)$ المنحني محدب وبعدها مقعر .

تسمى هذه النقطة نقطة انقلاب (**Point of Inflection**)

تعريف [3-5-3]

تدعى النقطة التي تنتمي لمنحني دالة والتي يتغير عندها منحني الدالة (من تقعر الى تحدب) أو بالعكس (من تحدب الى تقعر) بنقطة انقلاب لهذا المنحني.



مثال -2- جد نقطة الانقلاب للمنحني: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

الحل

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12$$
$$f''(x)=12x-6$$
$$f''(x)=0$$
$$12x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
$$f(\frac{1}{2})=-\frac{11}{2}$$

لندرس الآن اشارة $f''(x)$ في جوار $x=\frac{1}{2}$

نلاحظ عن يمين $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ موجبة

وعن يسار $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ سالبة

$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2},-\frac{11}{2})$ هي نقطة انقلاب.

مثال- 3-

جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب إن وجدت للدوال التالية :

a) $f(x)=4x^3-x^4$

b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$

c) $h(x) = 4-(x+2)^4$

d) $f(x)=3-2x-x^2$

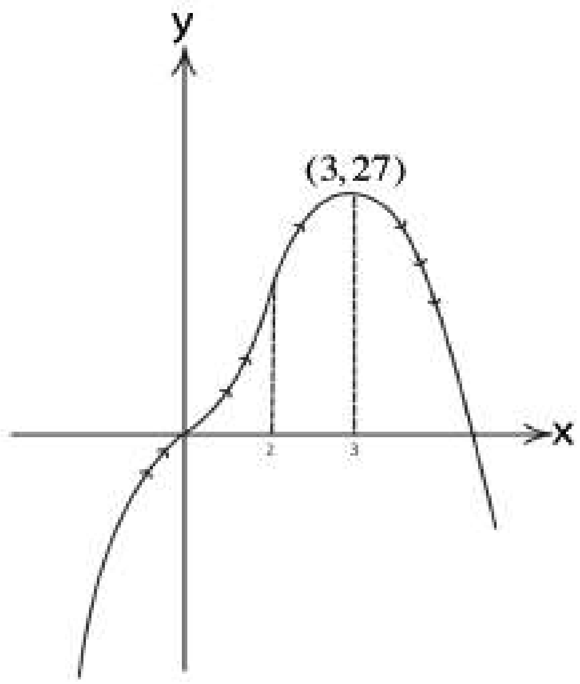
e) $f(x)=x^4+3x^2-3$

الحل

a) $f(x)=4x^3-x^4$

$f'(x)=12x^2-4x^3$

$f''(x)=24x-12x^2$



$f''(x)=0$

$0=12x(2-x)\Rightarrow$

$x=0$ ، $x=2$

$f(0)=0$, $f(2) = 16$

$(0,0)$, $(2, 16)$

محدبة مقعرة محدبة

$- - - - - - - -\ 0\ + + + + + + +\ 2\ - - - - - - - -$ اشارة $f''(x)$

انقلاب انقلاب

f محدبة في $\{x: x>2\}$ و $\{x: x<0\}$

f مقعرة في الفترة المفتوحة : $(0,2)$

$\therefore$ نقطتا الانقلاب هما : $(2,16)$ ، $(0,0)$

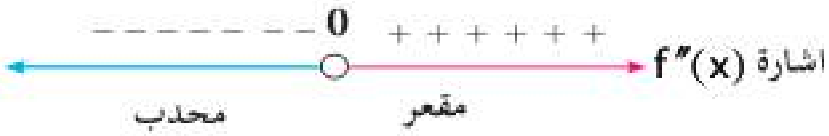
b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$

الحل

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f''(0)$ غير معرفة



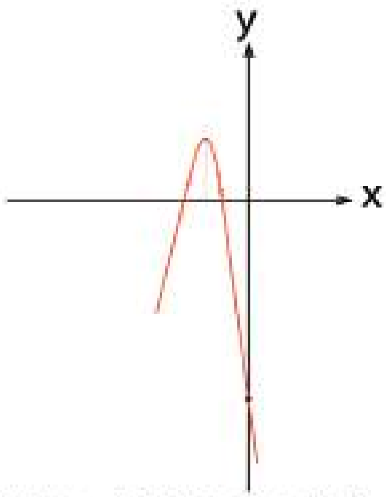
f محدبة : في $\{x : x < 0\}$

f مقعرة : في $\{x : x > 0\}$

لاتوجد نقطة انقلاب لأن **0** لاينتمي لمجال الدالة .

c) $h(x)=4-(x+2)^4$

الحل



$h'(x)=-4(x+2)^3$

$h''(x)=-12(x+2)^2$

$h''(x)=0 \Rightarrow$

$0=-12(x+2)^2 \Rightarrow x=-2$

يمكن للطالب بالرجوع الى اختبار المشتقة الاولى ليجد ان للدالة نقطة نهاية عظمى محلية عند $(-2 , 4)$

الدالة **h** محدبة في $\{x : x < -2\}$ و $\{x : x > -2\}$

لاتوجد نقطة انقلاب عند $x=-2$ لأن الدالة محدبة على جهتيها

d) $f(x)=3-2x-x^2$

الحل

$f'(x)=-2-2x$

$f''(x)=-2<0$

$\therefore$ f الدالة محدبة في R لذا لاتوجد نقطة انقلاب.

e) $f(x)=x^4+3x^2-3$

الحل

$f'(x)=4x^3+6x \Rightarrow f''(x)=12x^2+6>0$ ، $x \in R$ لجميع قيم

الدالة f مقعرة في R . لذا لاتوجد نقطة انقلاب

[3-6] اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

بدلاً من ملاحظة كيفية تغير اشارة f' عند المرور بالنقطة الحرجة حيث $f'(x)=0$ فانه بامكاننا استخدام الاختبار التالي لنقرر فيما إذا كانت النقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى محلية . وذلك باستخدام اختبار المشتقة الثانية وكما يأتي :

1) اذا كان $f'(c)=0$ وإن $f''(c)<0$ فإن f تمتلك نهاية عظمى محلية عند x=c .

2) اذا كان $f'(c)=0$ وإن $f''(c)>0$ فإن f تمتلك نهاية صغرى محلية عند x=c.

3) اذا كانت $f''(c)=0$ او $f''(c)$ غير معرفة فلا يصح هذا الاختبار (ويعاد الاختبار باستخدام المشتقة الاولى) .

مثال- 1-

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان أمكن، جد النهايات المحلية للدوال الآتية :

a) $f(x)=6x-3x^2-1$ c) $f(x)=x^3-3x^2-9x$

b) $f(x)=x-\frac{4}{x^2}, x\neq 0$ d) $f(x)=4-(x+1)^4$

الحل

a) $f(x)=6x-3x^2-1$

$f'(x)=6-6x$

$f'(x)=0$

$0=6-6x \Rightarrow x=1$

$f''(x)=-6 \Rightarrow f''(1)=-6<0$

بما أن : $f'(1)=0$ و $f''(1)<0$ ، اذاً توجد نهاية عظمى محلية عند $x=1$

$\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي : $f(1)=6-3-1=2$

b) $f(x)=x-\frac{4}{x^2} \quad , \quad x\neq 0$

$f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$

$f'(x)=0$

$0=1+\frac{8}{x^3} \Rightarrow x^3+8=0 \Rightarrow x=-2$

$\because \quad f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$

$\therefore \quad f''(x)=\frac{-24}{x^4}$

$f''(-2)=-\frac{24}{16}<0$

بما أن : $f'(-2)=0$ و $f''(-2)<0$ ⇐ توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة $x=-2$

∴ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-2)=-2-1=-3$

c) $f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(x)=0$

$0=3(x^2-2x-3) \Leftrightarrow 0=3(x-3)(x+1)$

$\Rightarrow x=3$ او $x=-1$

$f''(x)=6x-6$

عندما $x=3$ فان $\Rightarrow f''(3)=18-6=12>0$

∴ توجد نهاية صغرى محليةهي $f(3)=27-27-27=-27$

وعندما $x=-1$ فان $\Rightarrow f''(-1)=-6-6=-12<0$

∴ توجد نهاية عظمى محلية هي $f(-1)=5$

d) $f(x)=4-(x+1)^4$

$f'(x)=-4(x+1)^3$

$f'(x)=0$

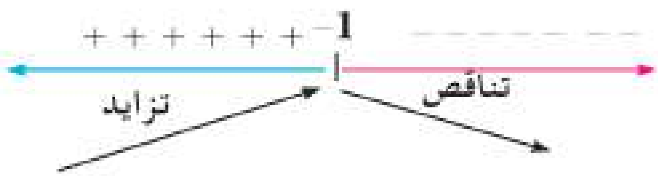
$0=-4(x+1)^3 \Rightarrow x=-1$

$f''(x)=-12(x+1)^2$

$f''(-1)=0$

هذه الطريقة لا تصح نعود الى ملاحظة تغير اشارة f' بجوار $x=-1$

اشارة $f'(x)$



وبما أن f متزايدة في $\{x : x < -1\}$

ومتناقصة في $\{x : x > -1\}$

∴ توجد نهاية عظمى محلية هي : $f(-1) = 4 - (-1+1)^2 = 4$

مثال -2-

لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}, x \neq 0 , a \in R$

فجد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ، ثم بين أن الدالة f لاتمتلك نهاية عظمى محلية.

الحل

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

$$f''(1) = 2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\because f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = 6 > 0 \ , \ \forall x \in R$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

∴ لاتملك f نهاية عظمى محلية

مثال -3- عين قيمتي الثابتين b,a لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ، ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

الحل

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$$

بما أن للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b \Rightarrow 0 = 3 - 2a + b \ldots(1)$$

بما أن للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b \Rightarrow 0 = 12 + 4a + b \ldots(2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) آنياً نجد ان :

$$a = \frac{-3}{2}, b = -6$$

$$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

اشارة $f''(x)$: $- - - - - - - -$ $\frac{1}{2}$ $+ + + + + +$

تحدب ، تقعر

بما أن f مقعرة في $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$ ومحدبة في $\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$ نقطة انقلاب

مثال -4-

اذا كان منحني الدالة : $f(x)=ax^3+bx^2+c$

مقعر في $\{x : x<1\}$ ومحدب في $\{x : x>1\}$

ويمس المستقيم : $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ فجد قيم الاعداد الحقيقية c,b,a .

الحل

$\because$ الدالة مستمرة لأنها كثيرة الحدود ،مقعرة في $\{x : x<1\}$ ومحدبة في $\{x : x>1\}$ فهي تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$

$\therefore\ f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0 \qquad \div 2$

$3a+b=0 \Rightarrow b=-3a \quad ...(1)$

ميل المماس $y+9x=28$ هو $\frac{dy}{dx}=-9$

$f'(3)$ هو ميل المماس لمنحني الدالة f عند $x=3$

$f'(3)=27a+6b$

$-9=27a+6b \qquad \div 3$

$\Rightarrow -3=9a+2b \qquad ....(2)$

النقطة $(3,1)$ تحقق معادلة منحني الدالة $y=f(x)=ax^3+bx^2+c$

$\therefore 1 = 27a + 9b + c \quad \ldots(3)$

وبالتعويض من (1) في (2) ينتج :

$-3 = 9a + 2(-3a) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -3(-1) = 3$

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج :

$1 = -27 + 27 + c \Rightarrow c = 1$

مثال -5-

اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ، ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in R$.

الحل

عند $x = 1$ توجد نقطة انقلاب

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow f''(1) = 0$

$\therefore 0 = 6a + 6 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

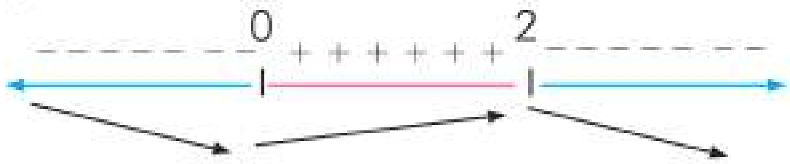
$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$

$-3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 2$ حرجتان

اشارة $f'(x)$



$\therefore$ f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$\therefore$ النقطة $(2,8)$ نهاية عظمى محلية و تحقق معادلة منحني الدالة :

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$\therefore 8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$

تمارين

1. لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث ان $a\in\{-4,8\}, b\in R$ جد قيمة a اذا كانت :
أ) الدالة f محدبة ب) الدالة f مقعرة .

2. اذا كانت (2,6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a,b\in R$
وبين نوع النقطة الحرجة.

3. اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ، $g(x)=1-12x$ وكان كل من g,f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي (1,-11) فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$.

4. اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة $c\in R$
ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

5. اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي (-1,5) فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$.

6. لتكن $f(x)=x^2-\frac{a}{x}$ ، $a\in R/\{0\}$ ، $x\neq 0$

برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

7. المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند (2,-1) وكانت له نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c\in R$ وما نوع النهاية .

[3-7] رسم المخطط البياني للدالة Graphing Function

ولكي نرسم المخطط البياني لدالة معطاة نتبع الخطوات الاتية :

1) نحدد أوسع مجال للدالة :

فاذا كانت الدالة حدودية (**Polynomial**) فإن أوسع مجال لها هو **R**

اما اذا كانت دالة نسبية $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ فان اوسع مجال لها هو $\{x\in R : h(x)\neq 0\}$

2) نبين نوع التناظر للمنحني هل هومع محور الصادات أم مع نقطة الاصل ؟

(**i**) $f : A \rightarrow B$ متناظر حول محور الصادات $\Leftrightarrow$

$$\forall x\in A\ \exists(-X)\in A \Rightarrow f(-x)=f(x)$$

(**ii**) $f : A \rightarrow B$ متناظر حول نقطة الاصل $\Leftrightarrow$

$$\forall x\in A\ \exists(-X)\in A \Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

3) نبين إن كان منحني الدالة يقطع المحورين أم لا ؟

اي نجعل $x=0$ ونجد قيمة y (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور الصادات .

ونجعل $y=0$ ونجد قيمة أو قيم x (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور السينات

4) نجد المستقيمات المحاذية الأفقية والعمودية في الدوال النسبية إن وجدت :

(**i**) فاذا كانت $y=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ نجعل $h(x)=0$ ونجد قيم x

ولتكن $x=a$ فهي تمثل معادلة المستقيم المحاذي العمودي (**Vertical Asymptote**)

(**ii**) واذا كانت $x=\dfrac{n(y)}{m(y)}$ نجعل $m(y)=0$ ونجد قيمة (y) (ان امكن) ولتكن $y=b$ فهي تمثل المحاذي الافقي

(**Horizontal Asymptote**)

5) نجد $f'(x)$, $f''(x)$ ومنهما نجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ومناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب إن وجدت .

6) نجد نقط اضافية إن احتجنا الى ذلك ثم نرسم منحني الدالة .

مثال - 1 -

ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة : $f(x)=x^5$

الحل

(1) اوسع مجال = R

(2) $(0,0)$ نقطة التقاطع مع المحورين الإحداثيين.

(3) المنحني متناظر حول نقطة الاصل لأن:

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x)=(-x)^5$$
$$=-x^5$$
$$f(-x)=-f(x)$$

(4) المحاذيات : لا توجد لأن الدالة ليست نسبية.

(5)
$$f'(x)=5x^4$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$$

اشارة $f'(x)$: + + + + + + 0 + + + + + +

f متزايدة في كل من $\{x: x>0\}$ ، $\{x: x<0\}$

$(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

$$f''(x)=20x^3$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$$

اشارة $f''(x)$: − − − − − − − − 0 + + + + + +

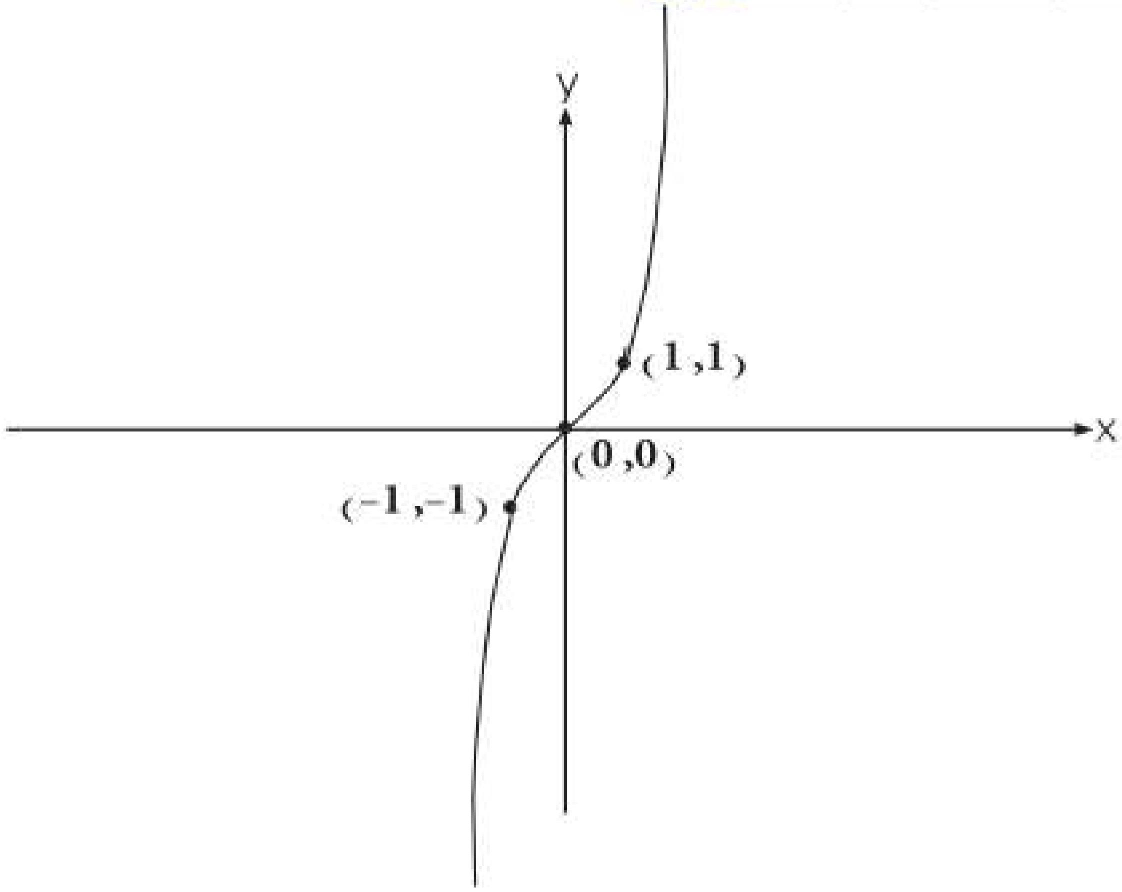
تحدب تقعر

f مقعرة في $\{x: x>0\}$

f محدبة في $\{x: x<0\}$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة الانقلاب

x	0	1	−1	2	−2
y	0	1	−1	32	−32



مثال – 2-

ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة : $y = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل

1) اوسع مجال = R

2) التقاطع مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4)$

3) التناظر

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4$$

$$= -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل لأن $f(x) \neq f(-x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

4) المحاذيات لا توجد لأن الدالة ليست نسبية .

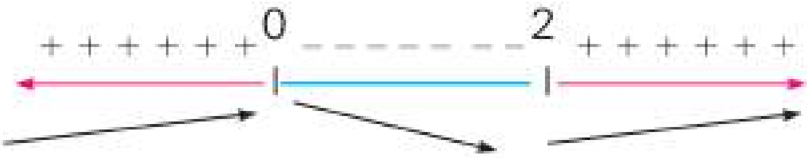
5)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2$$

$$f(0) = 4 \Rightarrow (0,4)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow (2,0)$$



اشارة $f'(x)$

f متزايدة في كل من $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < 0\}$

f متناقصة في الفترة $(0 , 2)$

$\therefore$ $(0, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2 , 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2)$

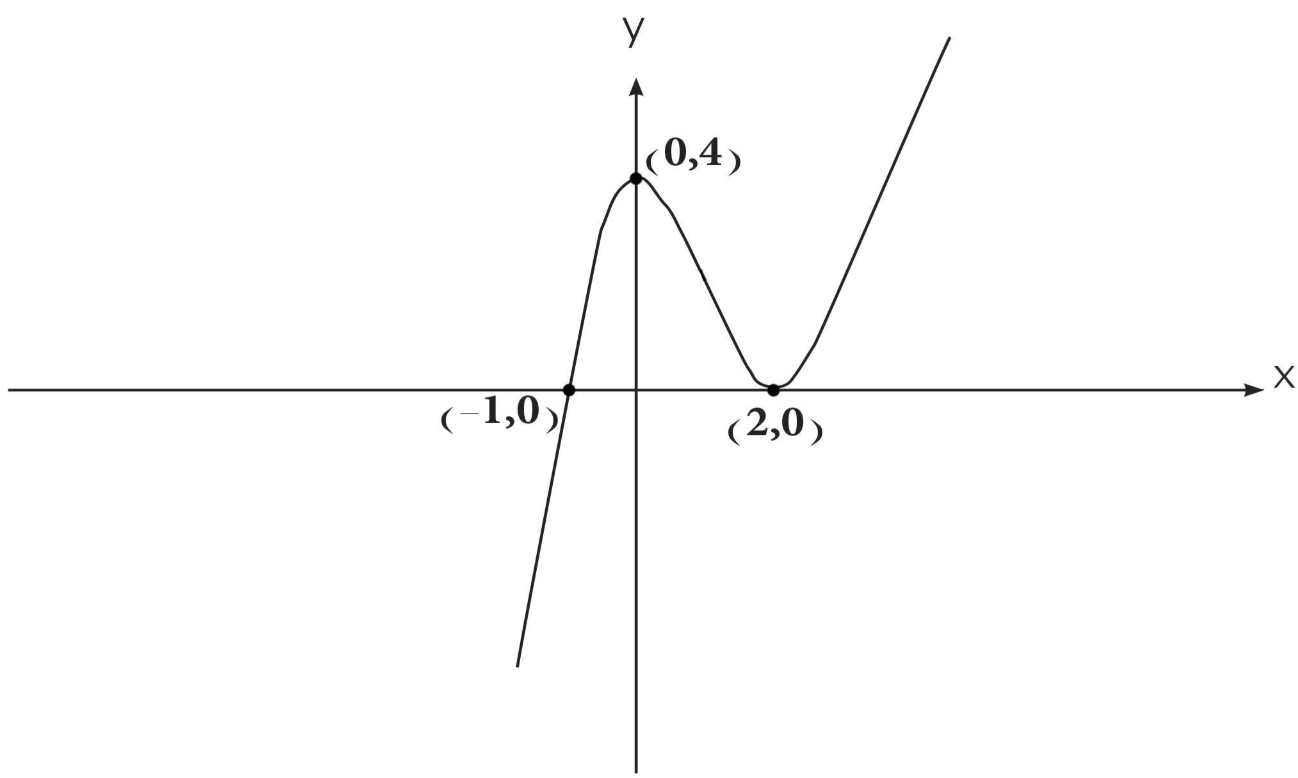
f مقعرة في $\{x : x > 1\}$

f محدبة في $\{x : x < 1\}$

$\therefore$ $(1, 2)$ نقطة انقلاب .

6) الجدول

x	0	1	2	3	-1
y	4	2	0	4	0



مثال -3-

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$

الحل

1) اوسع مجال للدالة : $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\therefore$ اوسع مجال للدالة هو $R-\{-1\}$

2) بما أن 1 ينتمي الى مجال الدالة لكن (1-) لاينتمي الى مجال الدالة لذلك فالمنحني غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الاصل.

3) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين:

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1),$

$y=0 \Rightarrow \dfrac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow (\dfrac{1}{3},0)$ هما نقطتا التقاطع مع المحورين

4) المستقيم المحاذي الشاقولي $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$f(x)=y=\dfrac{3x-1}{x+1} \Rightarrow$

$yx+y=3x-1 \Rightarrow yx-3x=-1-y$

$x(y-3)=-1-y \Rightarrow x=\dfrac{-1-y}{y-3}$

$y-3=0 \Rightarrow y=3$ المستقيم المحاذي الافقي

5) $f'(x)=\dfrac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{4}{(x+1)^2}$

اشارة $f'(x)$ + + + + + + -1 + + + + + +

$\forall x \in R-\{-1\}$ ، $f'(x)>0$

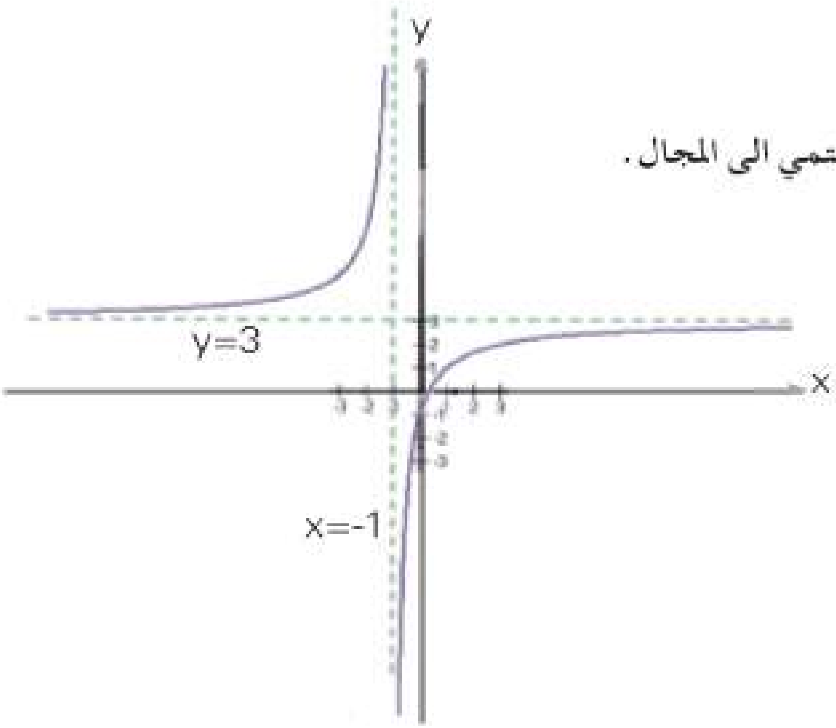
الدالة متزايدة في $\{x:x<-1\}$, $\{x:x>-1\}$ ولاتوجد نقاط حرجة.

$f'(x)=4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-8(x+1)^{-3}(1)=\dfrac{-8}{(x+1)^3}$

الدالة مقعرة في $\{x : x < -1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x > -1\}$

الدالة لاتمتلك نقطة انقلاب لان (-1) لا ينتمي الى المجال .



مثال -4- باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

الحل

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين : عندما $x=0$ فإن $y=0$ وبالعكس .

$\therefore$ ($0 , 0$) نقطة التقاطع مع المحورين .

3) التناظر :

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$$

$\therefore$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات :

لذلك لايوجد محاذي عمودي

$$x^2+1\neq 0$$

$$f(x)=y=\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=x^2$$

$$x^2(y-1)=-y\Rightarrow x^2=\frac{-y}{y-1}$$

$$y-1=0\Rightarrow y=1$$

∴ المستقيم المحاذي الافقي

5)

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$$

اشارة $f'(x)$: - - - - - - - - 0 + + + + + +

تناقص ، تزايد

$f(x)$ متزايدة في $\{x:x>0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x:x<0\}$

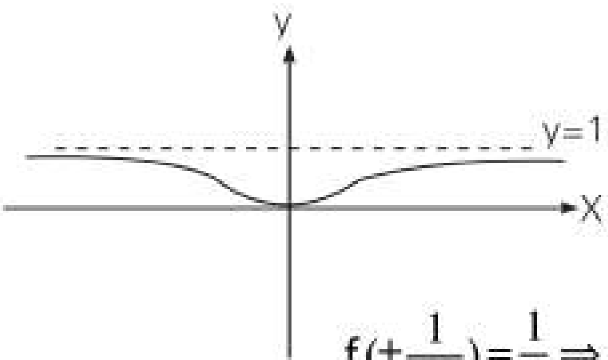
$(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

اشارة $f''(x)$: - - - - - - - $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ + + + + + + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - - - - - - - -

تحدب ، تقعر ، تحدب



$f(x)$ محدبة في $\{x:x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x:x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

نقطتا الانقلاب هما :

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}),(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4})$$

تمارين

أرسم بأستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x)=10-3x-x^2$

2) $f(x)=x^2+4x+3$

3) $f(x)=(1-x)^3+1$

4) $f(x)=6x-x^3$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

7) $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

8) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

9) $f(x)=2x^2-x^4$

10) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$

[3-8] تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى.

ظهرت في القرن السابع عشر الكثير من الاسئلة دفعت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن امثلة ذلك المسائل التي وردت في بحوث الفيزياء مثل اقصى ارتفاع تصله قذيفة اطلقت بزوايا مختلفة ، او اقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقولياً الى اعلى اواقل زمن وأقل كلفة ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... الخ .

ولحل هذه المسائل نتبع الخطوات الآتية :

1 . نرسم مخططاً للمسألة (إن امكن) ونعين عليه الأجزاء المهمة في المسألة .

2 . نكوّن الدالة المراد ايجاد قيمتها العظمى او الصغرى ونحدد مجالها على ان تكون في متغير واحد.

3 . اذا كان المجال فترة مغلقة نجد الاعداد الحرجة وقيم الدالة في اطراف الفترة وفي الاعداد الحرجة . فأيّها اكبر هي القيمة العظمى وأيّها أصغر هي القيمة الصغرى.

مثال- 1- جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن .

الحل

ليكن العدد $= x$

$\therefore$ مربع العدد $= x^2$

ولتكن $f(x) = x+x^2$

$$f'(x)=1+2x,\ f''(x)=2>0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

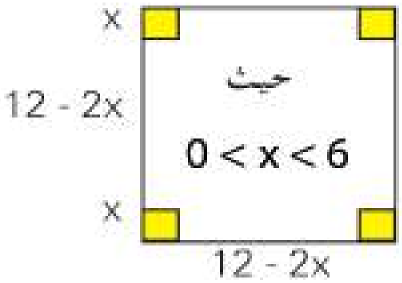
$$f''(-\frac{1}{2})=2>0$$

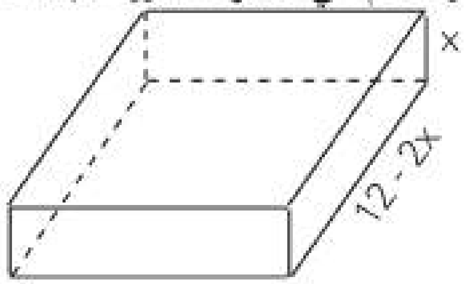
$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ العدد هو $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

مثال -2-

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها **12cm** وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها . ما هو الحجم الأعظم لهذة العلبة ؟





الحل

نفرض طول ضلع المربع المقطوع يساوي **x cm**

∴ أبعاد الصندوق هي : $x \quad ;12-2x; \quad 12-2x$

الحجم = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة :

$$v=(12-2x)(12-2x)(x)$$

$$V = f(x)=x(144-48x+4x^2)$$

$$V = f(x)=144x-48x^2+4x^3$$

$$\frac{dv}{dx}= f'(x)=144-96x+12x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=0 \Rightarrow 0=12(12-8x+x^2) \Rightarrow 12(6-x)(2-x)=0$$

النقط الحرجة $x=6$ ، $x=2$

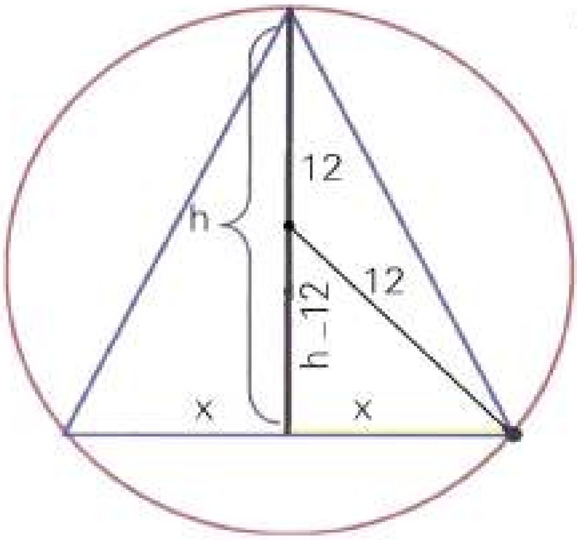
لاحظ من الشكل أن 6 يهمل لانه غير معقول

عند 2 توجد نهاية عظمى للحجم وتساوي $v= f(2)=2(12-4)^2=128cm^3$

مثال -3-

جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

الحل



نفرض بعدي المثلث : h , $b = 2x$ قاعدة المثلث (المتغيرات)

لنجد علاقة بين المتغيرات :

مبرهنة فيثاغورس : $x^2 + (h-12)^2 = 144$

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 = 24h - h^2$$

$$\boxed{x = \sqrt{24h - h^2}}$$

الدالة : (مساحة المثلث)

$$A = \frac{1}{2}(b)(h)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) = hx$$

التعويض :

$$A = f(h) = h\sqrt{24h - h^2}$$

لاحظ المجال : $0 \le h \le 24$ وهذا يعني أن h موجبة فيمكن توحيد الجذر

$$A = f(h) = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$$

$$A = f(h) = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

المشتقة

$$\frac{dA}{dh} = f'(h) = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

نجد النقطة الحرجة لدالة المساحة

وعندما

$$f'(h) = 0 \Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0$$

$$4h^2(18 - h) = 0 \Rightarrow h = 18\text{cm}$$

∴ الارتفاع $h=18\ cm$

$$x=\sqrt{24h-h^2} \Rightarrow x=\sqrt{24(18)-18^2}$$

$$x=\sqrt{18(24-18)}=\sqrt{18(6)}=6\sqrt{3}cm$$

طول القاعدة $b=2x=12\sqrt{3}cm$

مس الدائرة: $A_1=\pi r^2 \Rightarrow A_1=\pi(12)^2=144\pi\ \ cm^2$

مس المثلث: $A_2=\frac{1}{2}bh \Rightarrow A_2=6\sqrt{3}(18)=108\sqrt{3}cm^2$

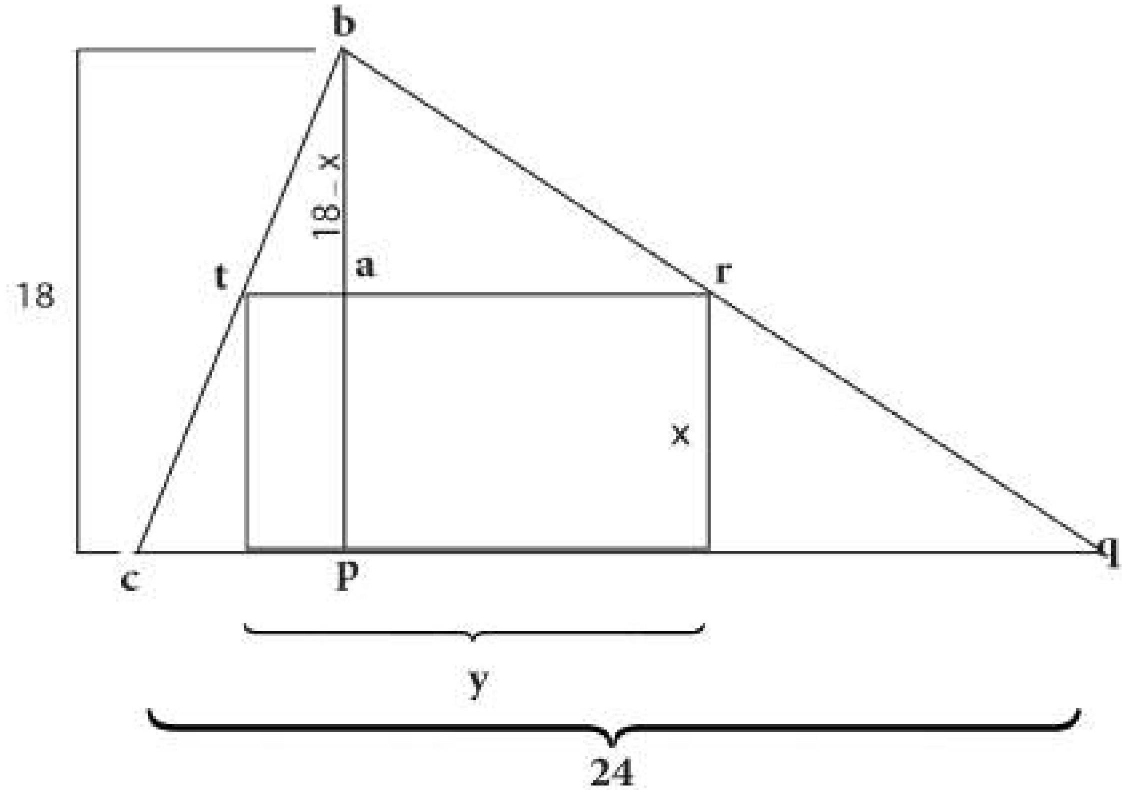
$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{108\sqrt{3}}{144\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

مثال -4-

جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته **24cm** وارتفاعه **18cm** بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل

- نفرض طول كل من بعدي المستطيل : x,y **cm**



العلاقة بين المتغيرات : المثلثان : **btr , bcq** متشابهان لتساوي زواياهما المتناظرة لذا تتناسب أضلاعهما المتناظرة وكذلك ارتفاعاهما .

$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bp} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$$

$$\Rightarrow y = \frac{24}{18}(18-x) \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}(18-x)}$$

الدالة : مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه $A = xy \Leftarrow$

التحويل بدلالة متغير واحد : $A = x\frac{4}{3}(18-x)$

التبسيط قبل المشتقة : $f(x) = A = \frac{4}{3}(18x - x^2)$

نجد النقط الحرجة : $f'(x) = \frac{4}{3}(18-2x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 9$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}(-2) = -\frac{8}{3}$$

$$f''(9) = -\frac{8}{3} < 0$$

وهذا يعني لدالة المساحة نهاية عظمى محلية عند **x= 9 cm** ويمثل أحد البعدين.

البعد الآخر $y = \frac{4}{3}(18 - x) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18-9) = 12 \text{ cm}$

مثال- 5-

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي **60cm** أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

الحل

الفرضية: نفرض نصف قطر الدائرة = **r cm** ونفرض طول ضلع المربع = **x cm**

العلاقة: محيط المربع + محيط الدائرة = **60 cm**

$$\therefore 60 = 4x + 2\pi r \Rightarrow$$

$$r = \frac{1}{\pi}(30 - 2x)$$

الدالة هي : مساحة الدائرة + مساحة المربع

التحويل لمتغير واحد : $A = x^2 + \pi \left[\frac{1}{\pi}(30 - 2x)\right]^2$

$$A = f(x) = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$$

نشتق: $f'(x) = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$

وعندما $f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$

$$0 = \pi x + 4x - 60 \Rightarrow 60 = \pi x + 4x$$

$$x(\pi+4)=60 \Rightarrow x=\frac{60}{\pi+4}\,cm$$

$$\therefore r=\frac{1}{\pi}(30-\frac{120}{\pi+4}) \Rightarrow r=\frac{30}{\pi+4}\,cm \Rightarrow x=2r$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية $f''(x)=2+\frac{1}{\pi}(8)>0$

(و . هـ . م)

مثال- 6-

جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2-x^2=3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة (0,4)

الحل

نفرض أن النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2-x^2=3$ فتحقق معادلته .

$$\therefore x^2=y^2-3 \qquad \dots (1)$$

$$s=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$$

$$\therefore s=\sqrt{x^2+y^2-8y+16} \qquad \dots (2)$$

بالتعويض من المعادلة 1 في 2 ينتج :

$$s=f(y)=\sqrt{2y^2-8y+13}$$

$$f'(y)=\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$$

$$f'(y)=0 \Rightarrow 4y-8=0 \Rightarrow y=2$$

$$\because x^2=y^2-3$$

$$\therefore x^2=4-3=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\Rightarrow (1,2),(-1,2)$$

تمارين

1. جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الاخر أكبر ما يمكن.
2. جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}cm$.
3. جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$.
4. جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}cm$.
5. جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$.
6. جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm .
7. جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول أصغر مثلث.
8. جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ثم جد محيطه.
9. جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .
10. جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين.
11. علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi)\ cm^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل مايمكن.
12. خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل.