5

الفصل الخامس

Chapter Five

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
المعادلة التفاضلية الاعتيادية	O . D . E

[5-1] مقدمة

يعتبر موضوع المعادلات التفاضلية من المواضيع الاساسية في الرياضيات التطبيقية لكثرة ظهورها في المسائل العلمية والهندسية. في هذا الفصل سنتطرق وبشكل مبسط للمعادلةالتفاضلية وكيفية حلها.

Definition تعريف [5-1-1]

المعادلة التفاضلية (Differential Equation) هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (اي للمتغير التابع في المعادلة)

ملاحظة

المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغير مستقل (Independt Variable) وليكن (x) ودالته غير المعروفة (y) (Dependt Variabie) وبعض مشتقات (y) بالنسبة الى (x) ويرمز لها O . D . E والتي هي مختصر الى (Ordinary Differential Equation)

مثلاً:

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $x^2 y'' + 5xy' - x^3 y = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

4) $y' + x^2 y + x = y$

5) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2 y\, y' = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتيادية لان المتغير y يعتمد فقط على المتغير X

تعريف [5-1-2]

المرتبة او (الرتبة) **Order** : تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بانها رتبة اعلى مشتقة .

الدرجة **Degree** : تعرف درجة المعادلة التفاضلية بأنها : اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

مثلاً :

1) $\frac{dy}{dx}+x-7y=0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2}=5x-3xy+7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

3) $(y''')^3+y'-y=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4) $y''+2y(y')^3=0$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

5) $(\frac{dy}{dx})^4=x^3-5$ من الرتبة الاولى والدرجة الرابعة

6) $x^2(\frac{dy}{dx})^4+(\frac{d^3y}{dx^3})^2+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

7) $y^{(4)}+\cos y+x^2y\,y'=0$ فهي من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

ملاحظة

درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة التفاضلية : $(y'')^2=\sqrt{1+(y')^2}$

من الرتبة الثانية لان اعلى مشتقة فيها y''

حيث يمكن ازالة الجذور او الاسس الكسرية ونحصل على : $(y'')^4=1+(y')^2$

وبذلك تكون درجة المعادلة التفاضلية الرابعة

[5-2] حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية
Solution of an Ordinary Differential Equation

ان الغاية من دراسة المعادلات التفاضلية هي كيفية أيجاد حلولاً لها ، ويتم ذلك بأيجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) y والمتغير المستقل x بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وان تحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض

تعريف [5-2-1] المعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

أ) خالية من المشتقة

ب) معرفة على فترة معينة

جـ) تحقق المعادلة التفاضلية

اي ان الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو اي دالة لمجهول (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل تحقق المعادلة التفاضلية .

مثال - 1 -

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

الحل

$y = x^2 + 3x$ نجد y' فيكون :

$$y = x^2 + 3x \quad \dots (1) \Rightarrow y' = 2x + 3 \quad \dots (2)$$

نعوض (1) و (2) في الطرف الايمن والايسر للمعادلة التفاضلية وكما يلي :

$$\begin{aligned} LHS &= xy' \\ &= x(2x+3) = 2x^2 + 3x \\ RHS &= x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x \\ &= 2x^2 + 3x = LHS \end{aligned}$$

اذاً العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه

[3 - 5] الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية:

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما اسلفنا هو اي علاقة بين y,x تحقق المعادلة ، غير ان الحل العام لاي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الاولى وجب ان يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الاولى . اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا . . .

فعلى سبيل المثال : $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ويحققها الحل الخاص $y = e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابت اختياري واحد c ، فيكون $y = ce^{5x}$

اما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ فهي من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة : $y = \sin x, y = \cos x$ غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين، كان يكونا A,B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y = A\sin x + B\cos x$

مثال - 2 - اثبت ان $y = x\ \ln|x| - x$ احد حلول المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} = x + y\ ,\ \ x > 0....(1)$$

الحل ان المعادلة $y = x\ \ln|x| - x$ خالية من المشتقات ومعرفة في $x > 0$ ولكي نثبت انها احد حلول المعادلة التفاضلية (1) نقوم بالتعويض المباشر في (1)

$$LHS = x\frac{dy}{dx} = x(x.\ \frac{1}{x} + \ln|x|(1) - 1)$$
$$= x.(\cancel{1} + \ln|x| - \cancel{1}) = x\ln|x|$$
$$RHS = x + y = x + x\ln|x| - x = x.\ln|x|$$

اذاً الدالة المعطاة هي احد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1).

مثال - 3-

بين ان $\ln y^2 = x+a$ ، $a \in R$ ، حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$

الحل

$$\ln y^2 = x+a \Rightarrow 2\ln|y| = x+a \Rightarrow 2\frac{1}{y}(y') = 1$$
$$\Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

$\therefore$ $\ln y^2 = x+a$ حلاً للمعادلة اعلاه

مثال - 4-

هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

وعليه $y = x^3 + x - 2$ هو حلاً للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

مثال - 5-

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

الحل

$$\because\ y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \quad \ldots (1)$$
$$\therefore\ y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$
$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \quad \ldots (2)$$

بالتعويض عن (1) ، (2) في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية ينتج:

$$LHS = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x) \Rightarrow$$
$$-\cancel{12\cos 2x} - 8\sin 2x + \cancel{12\cos 2x} + 8\sin 2x = 0$$ الطرف الايمن
$$= RHS$$

وعليه فان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة اعلاه.

مثال - 6-

هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$ ؟

الحل

$$\because\ y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow$$
$$2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x$$

بالقسمة على 2

$$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow LHS = yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$$ الطرف الايمن
$$\neq RHS$$

وعليه فان $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلاً للمعادلة اعلاه

مثال - 7-

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

الحل

$$\because\ y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \Rightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

وبالتعويض في الطرف الايسر للمعادلة

$$LHS = y'' + y' - 6y$$

$$= \left(4e^{2x} + 9e^{-3x}\right) + \left(2e^{2x} - 3e^{-3x}\right) - 6\left(e^{2x} + e^{-3x}\right)$$

$$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}$$

$= \mathbf{0} =$ الطرف الايمن

$= RHS$

وعليه يكون $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة اعلاه

تمارين

1 . بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $(x^2 - y^2) + 3xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 5y = 7$

c) $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$

d) $(\dfrac{d^3y}{dx^3})^2 - 2(\dfrac{dy}{dx})^5 + 3y = 0$

2 . برهن ان $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

3 . برهن ان العلاقة $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

4 . هل ان $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$ ؟

5 . هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟

6 . هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$ ؟

7 . هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$ ؟

8 . بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$

9 . بين ان $\ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$

[5-4] المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى

مقدمة :

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل ، أي يقوم على عمليات التكامل ، ومن المعروف انه لا يمكن ايجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة . اي لا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الاولية المعروفة . وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى انواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام.

وفي هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى بمتغيرين y , x .

ومع ان هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لاي منها بصورة عامة ، ولا توجد طريقة عامة للحل . وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن ايجاد حلها بطريقة مباشرة الى عدة انواع ، اهمها :

1. المعادلات التي تنفصل متغيراتها .
2. معادلات تفاضلية من النوع المتجانس .
3. معادلات تفاضلية تامة.
4. معادلات تفاضلية خطية – معادلة برنولي .

وفي هذا الفصل سنقتصر على النوع (1)

فمثلاً تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى الشكلين الاتيين:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$2)\ M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

حيث $M(x, y) \neq 0$, $N(x, y) \neq 0$

فالمعادلة التفاضلية : مثلاً $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{x+y}$

يمكن ان تكتب بالشكل

$$(3xy)\,dx = (x+y)\,dy$$

$$(3xy).dx - (x+y).dy = 0$$

حيث ان

$$M = 3xy \ , \ N = (x+y)$$

في البند اللاحق سندرس بعض طرق حل المعادلة التفاضلية.

[5-5] بعض طرق حل المعادلات التفاضلية

المعادلات التي تنفصل متغيراتها Separation of Variables

في هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع ان نعزل كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y فقط مع dy في الجانب الاخر فنحصل على:

$$f(x).dx = g(y)dy \ldots (1)$$

ثم نكامل طرفي المعادلة (1) فيكون

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث c ثابت اختياري (Arbitrary Constant)

مثال - 1-

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x+5$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2x+5 \Rightarrow dy = (2x+5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

مثال - 2-

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل

نجعل المعادلة بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

اي: $ydy = (x-1)dx$

باخذ التكامل للطرفين : $\int ydy = \int (x-1)dx$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c \Rightarrow y = \pm(x^2 - 2x + 2c)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm(x^2 - 2x + c_1)^{\frac{1}{2}}$$

(لكون c ثابت اختياري فان $2c$ ثابت اختياري ايضاً اسميناه c_1)

مثال - 3-

حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \ \cos^2 y \ dx$ حيث $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \cos y \neq 0$

الحل

نجعل المعادلة بالشكل $g(y)dy = f(x)dx$

اي: $\frac{1}{\cos^2 y} dy = \sin x \ dx$

$\sec^2 y dy = \sin x \, dx$

باخذ التكامل $\Rightarrow \int \sec^2 y dy = \int \sin x \, dx$

$\tan y = -\cos x + c$ حيث c ثابت اختياري

مثال - 4-

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2 , y = 9$

الحل

$y' - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$

$y^{-\frac{1}{2}} dy = x dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2} x^2 + c$

بالتعويض عن $y = 9 , x = 2$ ينتج

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow \quad c = 4$

∴ الحل هو

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2} x^2 + 4 \quad \Rightarrow y = (\frac{1}{4} x^2 + 2)^2$

مثال - 5-

حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$ حيث $y=0$ عندما $x=0$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^{y}\Rightarrow e^{-y}dy=e^{2x}dx$$

$$-\int e^{-y}(-1)dy=\frac{1}{2}\int e^{2x}(2)dx$$

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

بالتعويض عن $y=0$, $x=0$ ينتج

$$\Rightarrow -e^{0}=\frac{1}{2}e^{0}+c\Rightarrow -1=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=-\frac{3}{2}$$

اذن الحل هو :

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}\Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}(3-e^{2x})$$

$$\frac{1}{e^{y}}=\frac{3-e^{2x}}{2}$$

$$e^{y}=\frac{2}{3-e^{2x}}$$

وبأخذ $\ln$ للطرفين ينتج :

$$\Rightarrow y=\ln\left|\frac{2}{3-e^{2x}}\right|$$

مثال - 6-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$

الحل

$$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x+1}\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y|=\ln(x+1)^{2}+c\Rightarrow$$

$$\ln|y|-\ln(x+1)^{2}=c$$

$$\ln\frac{|y|}{(x+1)^{2}}=c\Rightarrow\frac{|y|}{(x+1)^{2}}=e^{c}$$

$$|y|=e^{c}(x+1)^{2}$$

$$\therefore y=\pm C_{1}(x+1)^{2}$$

حيث $C_1=e^{c}$ ثابت اختياري .

تمارين

1 – حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

a) $y' \cos^3 x = \sin x$

b) $\dfrac{dy}{dx} + xy = 3x \ , \qquad x = 1, y = 2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

d) $(y^2 + 4y - 1)y' = x^2 - 2x + 3$

e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

g) $y' = 2e^x y^3 , \qquad x = 0, y = \dfrac{1}{2}$

2 – جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية :

a) $xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

b) $\sin x \ \cos y \ \dfrac{dy}{dx} + \cos x \ \sin y = 0$

c) $x \cos^2 y \ dx + \tan y \ dy = 0$

d) $\tan^2 y \ dy = \sin^3 x \ dx$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 x \ \cos^2 y$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

g) $e^{x+2y} + y' = 0$