الفصل الرابع

Chapter Four

Integration التكامل

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
تجزئة الفترة $[x_0, x_n]$	$\sigma = (x_0, x_1, x_2 \dots x_n)$
المجموع الاسفل	$L(\sigma, f)$
المجموع الاعلى	$U(\sigma, f)$
المجموع	$\sum$
سيكما	σ

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات .

Regions Bounded by Curves.

تعرفت من دراستك السابقة على مناطق مستوية مختلفة مثل الذي تراه في الشكل (1 - 4) :

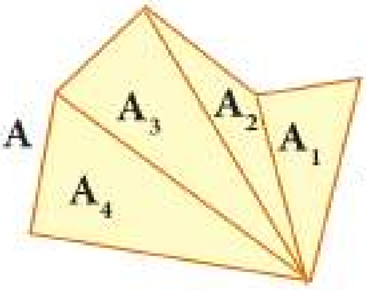
الشكل (4-1)

حيث A_1 منطقة مستطيلة و A_2 منطقة مثلثة و A_3 منطقة شبه منحرف و A_4 منطقة دائرية ولاشك أنك تعرف إيجاد مساحات هذه المناطق .

أما المنطقة A كما في الشكل (2 - 4) والتي تسمى منطقة مضلعة فيمكنك حساب مساحتها بتقسيمها الى مناطق مثلثة .

A_1 , A_2 , A_3 , A_4

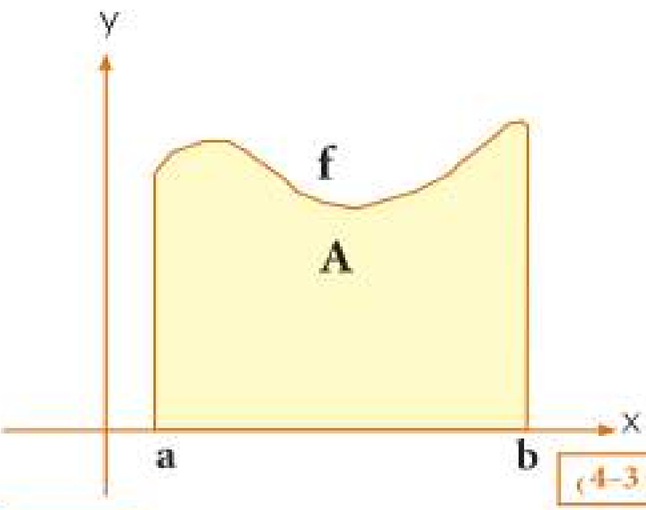
وتكون مساحتها تساوي مساحة A_1 + مساحة A_2 + مساحة A_3 +مساحة A_4



الشكل (4-2)

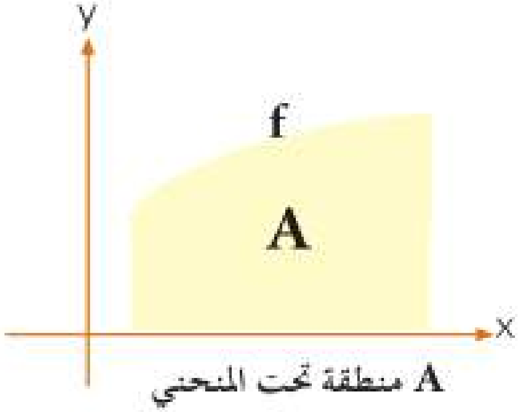
وبالطريقة نفسها يمكننا ايجاد مساحة اي منطقة مضلعة بعد أن نقسمها الى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة ، . . . .

اما المنطقة A في الشكل (3 - 4) والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها الى مناطق معلومة لديك مثل (مثلث ، مربع ، مستطيل ، دائرة ، . . .) فكيف يمكنك حساب مساحتها؟

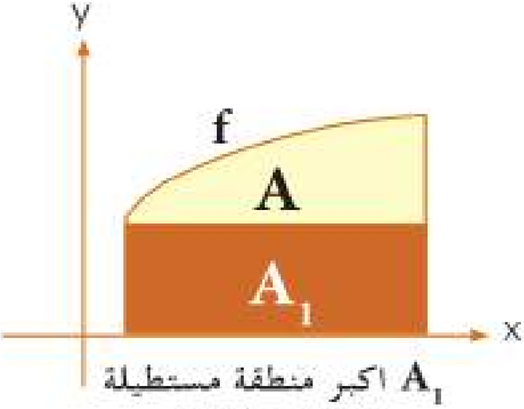


الشكل (4-3)

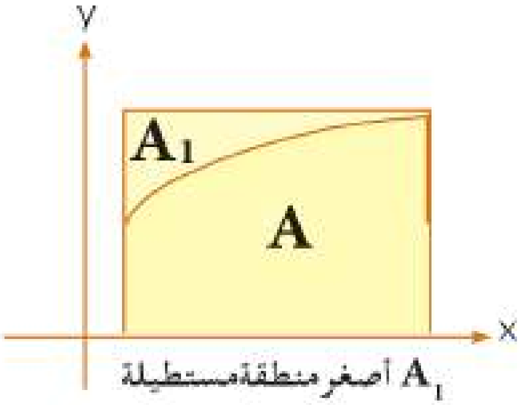
تسميات :



A منطقة تحت المنحني



A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل المنطقة A
(A_1 محتواة في A)



A_1 أصغر منطقة مستطيلة خارج المنطقة A

الشكل (4-4)

ملاحظة

1. مساحة أي منطقة مستوية هي عدد حقيقي غير سالب .
2. إذا كانت $A' \subseteq A$ فان مساحة المنطقة $A' \leq$ مساحة المنطقة A.

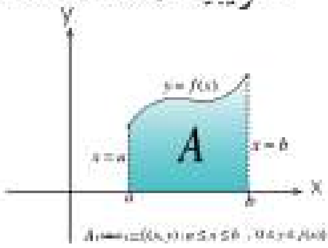
لاحظ الشكل (5 - 4)

الشكل (5-4)

[4-1-1] إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية :

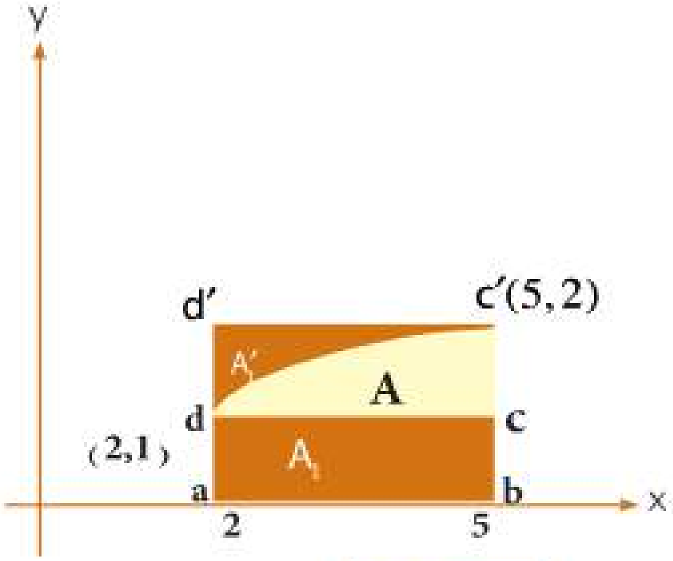
مثال – 1 –

في الشكل (4 – 6) ، A هي المنطقة تحت منحني الدالة المستمرة f , أوجد قيمة تقريبية لمساحة هذه المنطقة حيث :



(المنطقة) $A = \{(x, y) : 2 \le x \le 5 \ , \ y \le \sqrt{x-1}\}$

الحل



الشكل (4-6)

نحدد داخل المنطقة A اكبر منطقة مستطيلة (a b c d) بحيث تكون قاعدتها من x=2 الى x=5

ولتكن A_1 حيث $A_1 \subseteq A$ وعليه تكون مساحة هذه المنطقة

$A_1 = ab \times ad = (5-2) \times 1 = 3 \ \text{uint}^2$

كذلك نحدد خارج المنطقة أصغر منطقة مستطيلة (abc′d′) ولتكن A_1' حيث $A \subseteq A_1'$ بحيث تكون قاعدتها من x=2 الى x=5 فتكون مساحة A_1' تساوي:

$A_1' = ab \times ad' = (5-2) \times 2 = 6 \text{unit}^2$

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A_1'$

∴ مساحة $A_1 \le$ مساحة $A \le$ مساحة A_1'

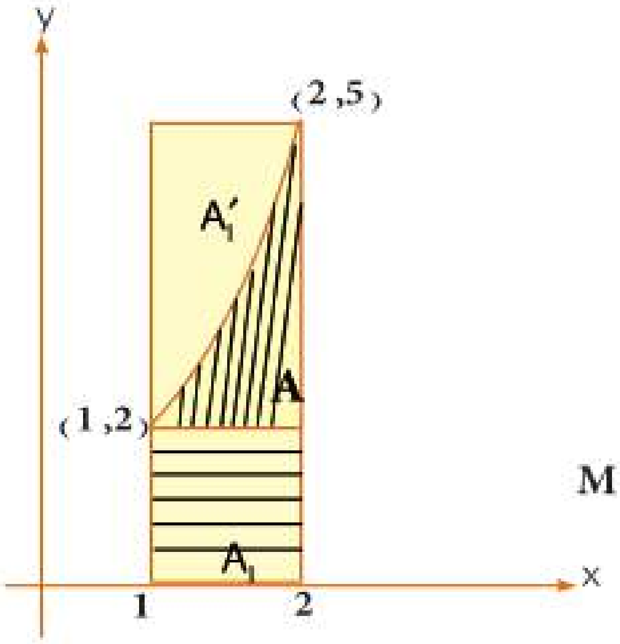
$3 \le$ مساحة المنطقة $A \le 6$

فتكون القيمة التقريبية الاولى لمساحة المنطقة A تساوي $\frac{3+6}{2} = 4\frac{1}{2} \text{unit}^2$

ملاحظة لاحظ في المثال 1 ان A_1 هي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها (ad) يساوي اصغر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها بالرمز (m) اما A_1' فهي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها ad' يساوي اكبر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها (M) وكما تعرفت في فصل التفاضل فان(m) (اصغر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) وكذلك (M) (اكبر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة [a,b] أو عند النقطة الحرجة ان وجدت .

مثال – 2- $A = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ y = x^2 + 1$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة **A** .



الشكل (7-4)

الحل

A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل **A** (محتواة في **A**)

قاعدتها من $x=1$ الى $x=2$ وارتفاعها $m = 2$

هي $A_1 = 2(2-1) = 2$ unit ^{2}

A_1' اصغر منطقة مستطيلة خارج **A** (تحتوي **A**)

قاعدتها ايضاً من $x=1$ الى $x=2$ وارتفاعها $M = 5$

$A_1' = 5(2-1) = 5$ unit ^{2}

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A_1'$

$\therefore$ مساحة المنطقة $A_1 \le$ مساحة منطقة $A \le$ مساحة منطقة A_1'

$\therefore$ $2 \le$ مساحة $A \le 5$

فتكون القيمة التقريبية لمساحة **A** تساوي $\dfrac{A_1 + A_1'}{2} = \dfrac{2+5}{2} = 3\dfrac{1}{2}$ unit ^{2}

[4-1-2] مساحة منطقة مستوية بدقة اكبر:

تمهيد : لنفرض ان مع مهند 19000 ديناراً وأراد حسام ان يعرف هذا المبلغ فكان الحوار الاتي بينهما :

حسام : كم معك من الدنانير ؟

مهند : قدّر المبلغ بنفسك علماً بأنه بين عشرة آلاف وعشرين الفاً .

حسام : أتوقع ان يكون معك 15000 ديناراً أي $15000 = \dfrac{20000+10000}{2}$.

مهند : اقتربت قليلاً ولكن ألمحّ لك اكثر فالمبلغ الذي معي بين 15000 ، 20000 دينار .

حسام : اذاً في حدود 17500 دينار اي $17500 = \dfrac{20000+15000}{2}$.

مهند : هذه القيمة اكثر دقة من القيمة الاولى لان القيمة الصحيحة 19000 دينار .

من هذا المثال نستنتج الأتي :

في المحاولة الاولى : 10000 < المبلغ < 20000 وكان الخطأ في القيمة التقريبية الاولى :

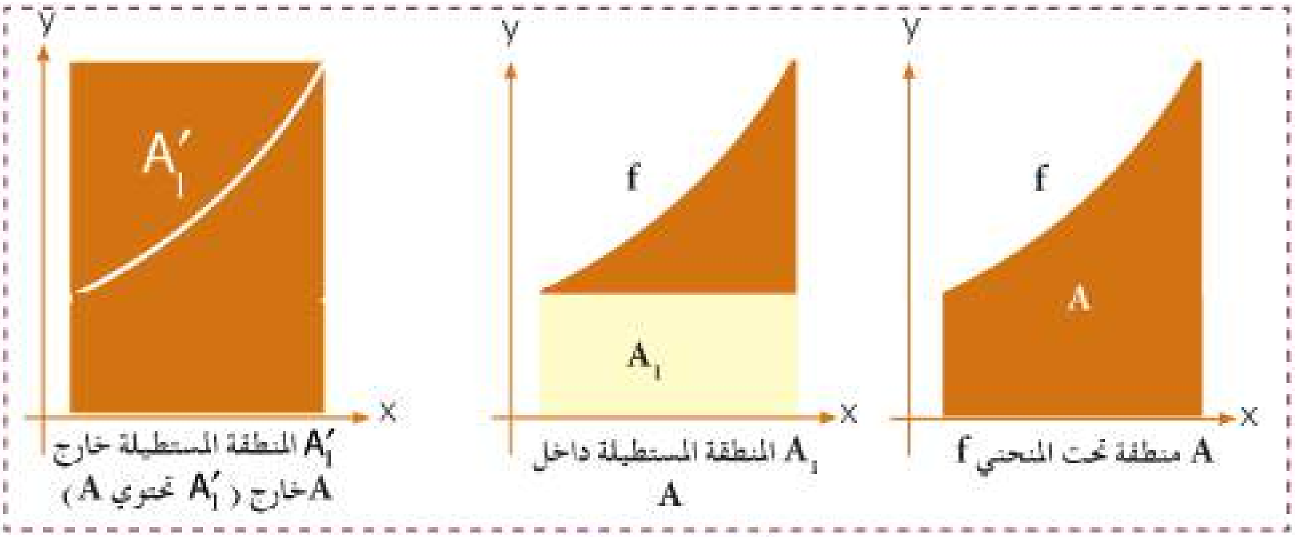
$$19000 - 15000 = 4000$$

في المحاولة الثانية: 15000 < المبلغ < 20000 كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ومقدار الخطأ :

$$19000 - 17500 = 1500$$

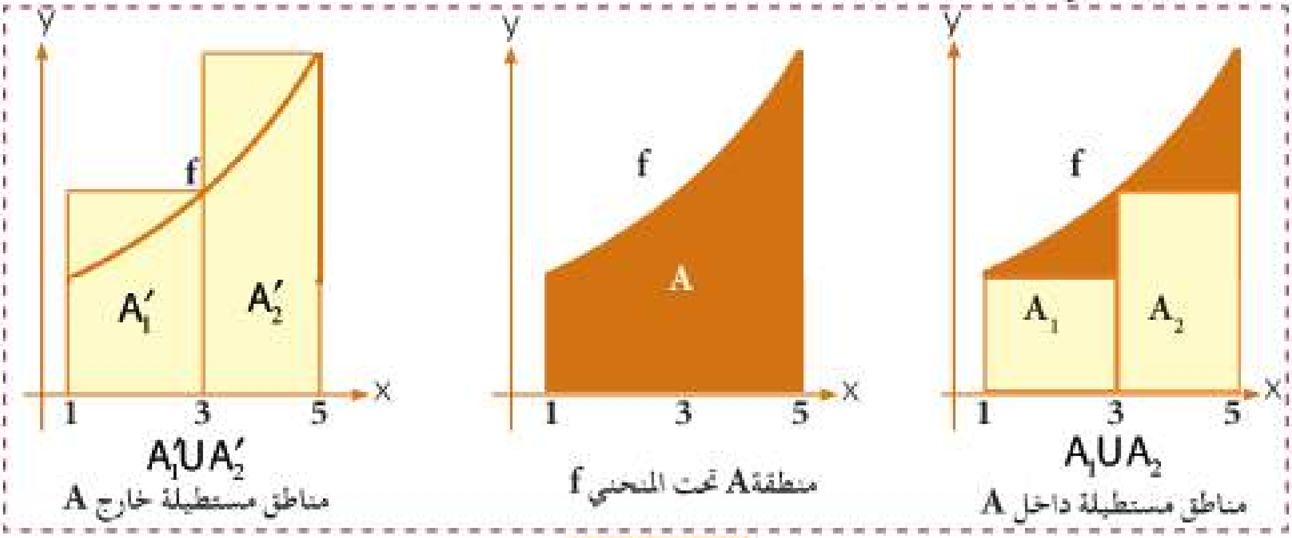
اذاً كلما استطعنا ان نجعل الفرق بين الحدين الاعلى والادنى اقل كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ، وهكذا لحساب مساحة منطقة A بدقة اكبر نحاول ان نجعل مقدار هذه المساحة بين حدين بحيث يكون الفرق بينهما اقل ما يمكن .

والحدين الاعلى والادنى هما مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية (المحتواة في A)، ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A والاشكال (8 – 4) ، (9 – 4) ، (10 – 4) توضح هذه الفكرة.



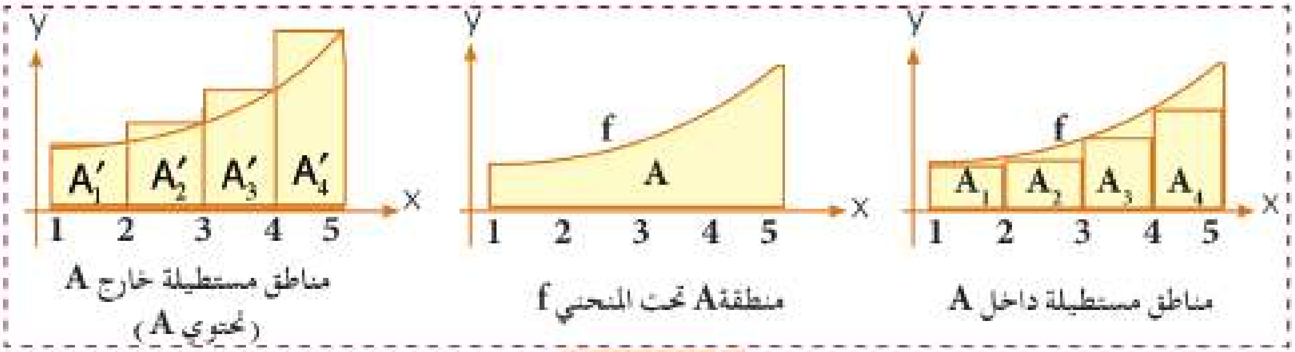
الشكل (4-8)

لاحظ ان هناك فرقاً واضحاً بين مساحة A_1 ومساحة A_1' حيث مساحة A_1 أصغر بكثير من مساحة A ,
اما مساحة A_1' فهي اكبر كثيراً من مساحة A .



الشكل (4-9)

في الشكل (4 - 10) تجزأت القاعدة [1 , 5] الى أربعة فترات جزئية .



الشكل (4-10)

ملاحظـة (1

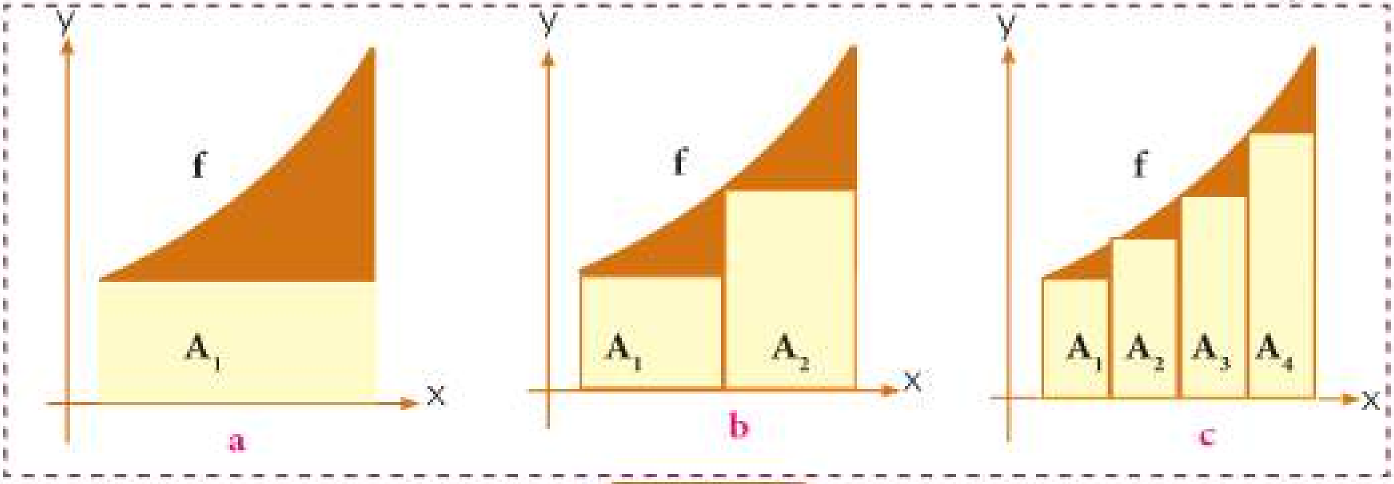
في الشكل (9 – 4) تجزأت الفترة الى فترتين جزئيتين همـا [1 ,3], [3 ,5] , في مثل هذه الحالة تسمي الثلاثية المرتبة (1 ,3 ,5) تجزيئاً (partition) للفترة [1 ,5] ويرمز لها بالرمز σ اي σ =(1 ,3 ,5)

وبصورة عامة اذا كانت لدينـا [a,b] واردنـا ان نجزئهـا الى n من الفترات المنتظمة فان طول الفترة حيث $h=\frac{b-a}{n}$.

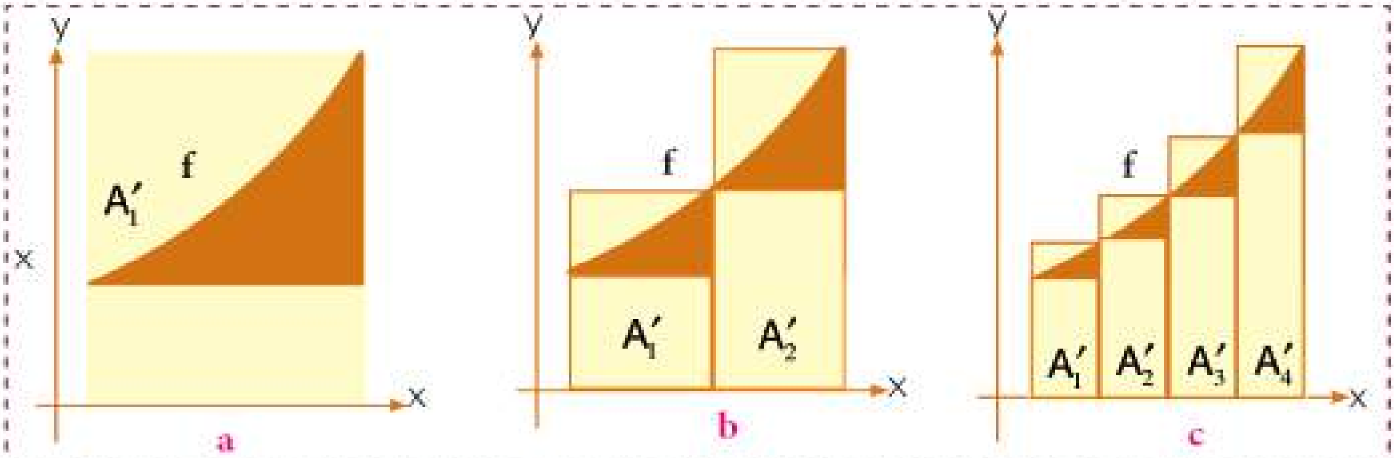
ملاحظـة (2

انظر الى الشكلين (11 – 4) ، (12 – 4) تجد أنه كلما زادت نقاط التجزيء فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجيا. وبالتالي فان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A تصبح اكثر دقة.

∴ مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ≤ مساحة A ≤ مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A.



الشكل (4-11)



الشكل (4-12)

مثال - 3-

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الاتية:

$$A = \{(x, y) : 2 \le x \le 5\ ,\ y = x^2 + 1\}$$

وذلك باستخدام التجزئة

a) $\sigma_1 = (2, 3, 5)$

b) $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$

الحل

a) $\sigma_1 = (2, 3, 5)$

ان تجزئة $\sigma_1 = (2,3,5)$ يعني ان الفترة $[2,5]$ تجزأت الى الفترات الجزئية $[2,3]$, $[3,5]$.

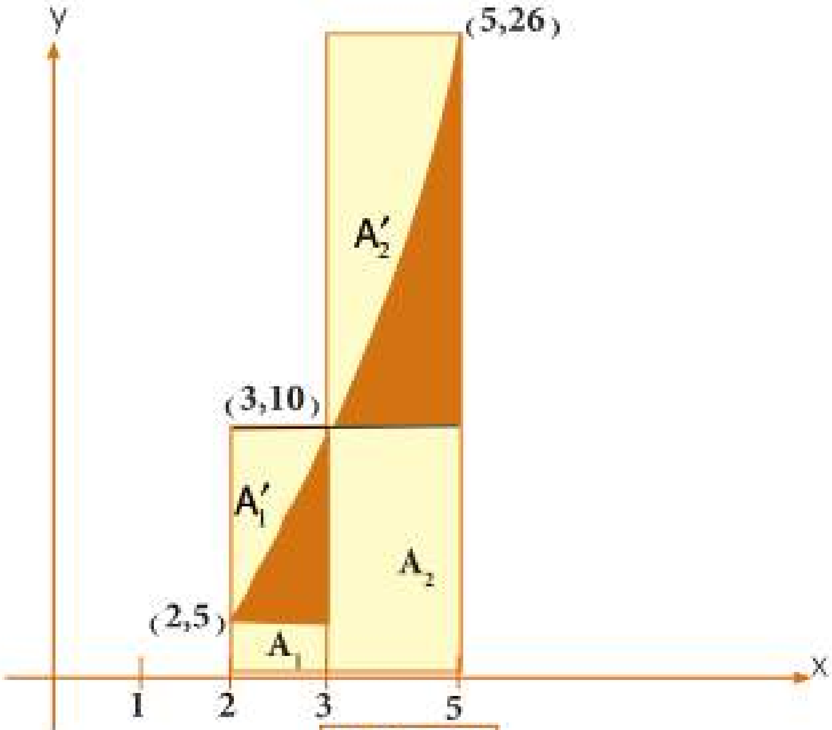
$$A_1 + A_2 = 1\times5 + 2\times10 = 25\text{unit}^2$$

كذلك

$$A_1' + A_2' = 1\times10 + 2\times26 = 62\text{unit}^2$$

بما ان مجموع مساحات المنطقة المستطيلة داخل A < مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A

$\therefore 25 \le A \le 62 \Rightarrow A = \dfrac{25+62}{2} = 43\dfrac{1}{2}\text{ unit}^2$ القيمة التقريبية لمساحة A



الشكل (4-13)

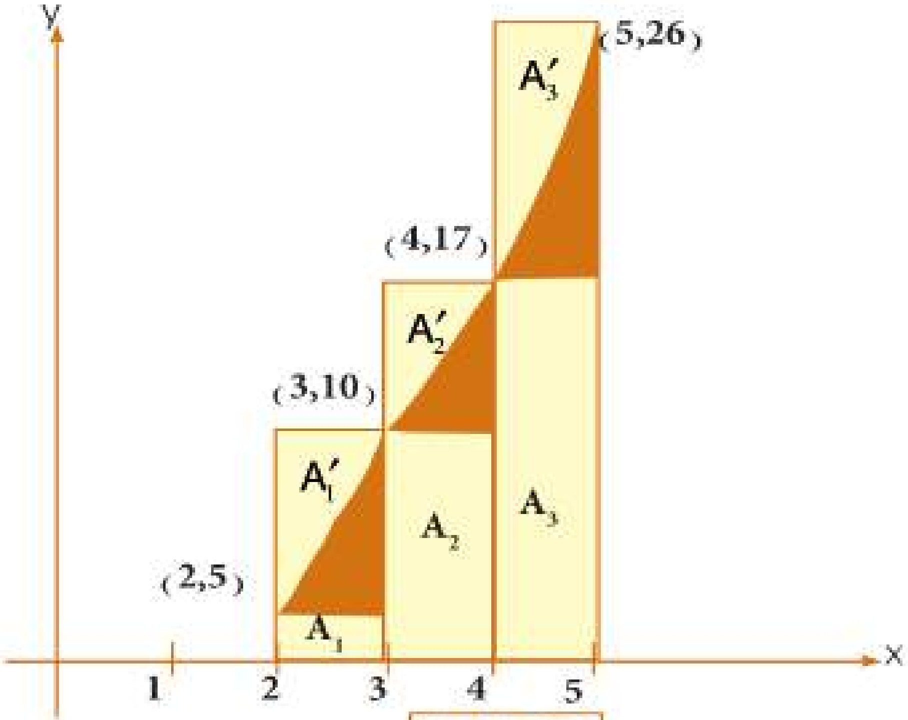
b) $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

ان تجزئة $\sigma_2 = (2,3,4,5)$ يعني ان الفترة [2 , 5] تجزأت الى الفترات الجزئية [4,5] ,[3 ,4] ,[2 ,3]

$$\therefore \quad A_1 + A_2 + A_3 = 1\times 5 + 1\times 10 + 1\times 17 = 32\text{unit}^2$$

$$\therefore \quad A'_1 + A'_2 + A'_3 = 1\times 10 + 1\times 17 + 1\times 26 = 53\text{unit}^2$$

$$\therefore A = \frac{32+53}{2} = 42\frac{1}{2}\text{unit}^2$$



الشكل (4-14)

ملاحظة

كما اوضحنا أنه كلما زادت عدد النقاط التجزيئية فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً.

ففي المثال السابق عندما كانت التجزئة (2 ,3 ,5) كان الفرق : 62 – 25 = 37

وعندما كان تجزئة (2 ,3 ,4 ,5) كان الفرق : 53 – 32 = 21

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

تعلمت في البند السابق إيجاد مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية ومجموع مساحات المناطق المستطيلة الخارجية ، وفي هذا البند سوف نعتبر الدالة : $f:[a,b] \to R$

مستمرة على $[a,b]$ ونجد مجموع مساحات المستطيلات داخل المنطقة A (Lower Rectangles) ثم مجموع مساحة المستطيلات خارج المنطقة A (Upper Rectangles) حيث A المنطقة تحت المنحني f) .

أولاً : نفرض أن : $f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$

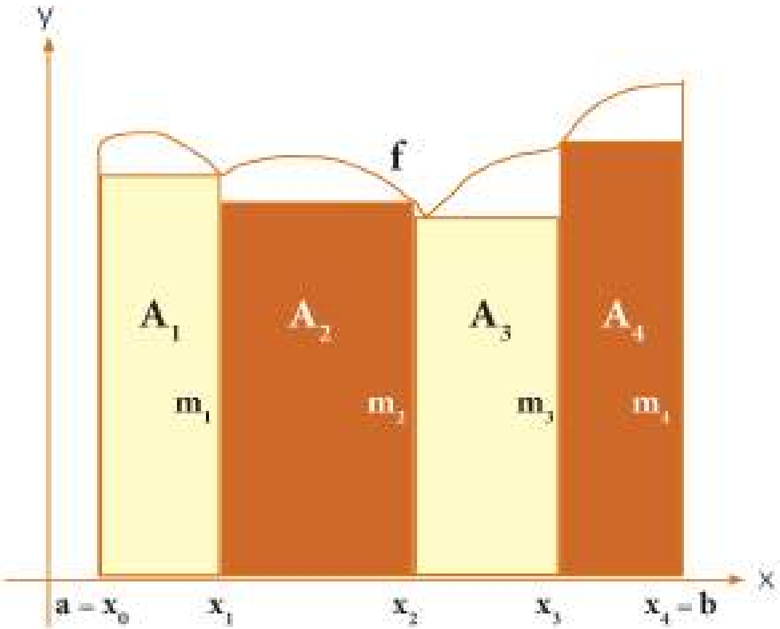
حيث $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

فتكون مساحة المنطقة المستطيلة A_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ وارتفاعها m_1 تساوي $m_1(x_1 - x_0)$ حيث m_1 (اصغر قيمة للدالة في هذه الفترة) .

وبالمثل مساحة المنطقة المستطيلة A_2 والتي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ وارتفاعها m_2 تساوي $m_2(x_2 - x_1)$ .... وهكذا

وبالتالي يكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A والتي سنرمز لها بالرمز $L(\sigma, f)$ تساوي

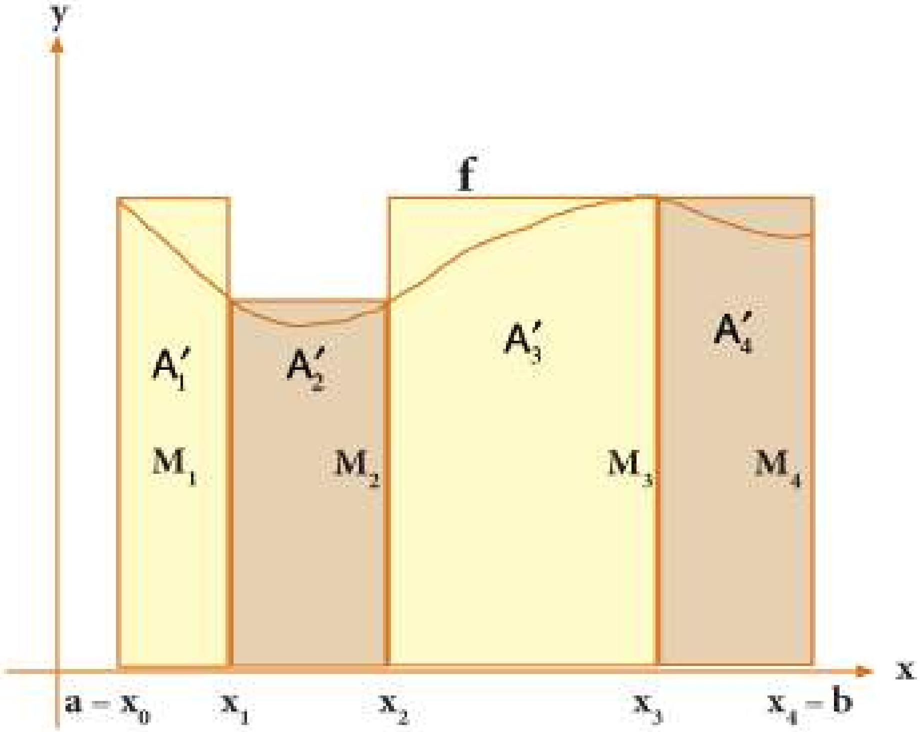
$$L(\sigma, f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3).$$



الشكل (4-15)

لاحظ ان : $L(\sigma, f) \leq$ مساحة A

كذلك في الشكل (16 - 4)



الشكل (16-4)

مساحة المنطقة A'_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ تساوي $M_1(x_1 - x_0)$ حيث M_1 اكبر قيمة للدالة في الفترة $[x_0, x_1]$ ومساحة المنطقة المستطيلة A'_2 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ تساوي $M_2(x_2 - x_1)$ ...... وهكذا

فيكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A تساوي والتي سنرمز لها بالرمز $U(\sigma, f)$ تساوي

$U(\sigma, f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3)$.

لاحظ أن:

$$U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$$
$$L(\sigma, f) \leq \text{مساحة } A \leq U(\sigma, f)$$

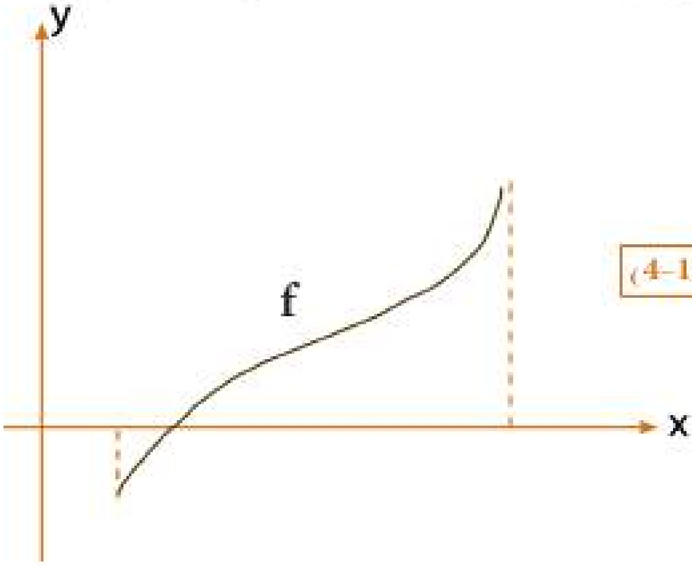
$\therefore$ أول قيمة تقريبية لمساحة A وفق التجزئة σ تساوي $\dfrac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$.

ثانياً : عندما لانشترط ان تكون $f(x) \geq 0$ ، $\forall\ x \in [a,b]$ كما في الشكل (17 - 4) فانه من الممكن ان يكون m (اصغر قيمة ممكنة للدالة) عدداً سالباً أو موجباً او صفراً وبالتالي فانه من المتوقع أن تكون $L(\sigma, f)$ عدداً سالباً أو موجباً أو صفراً .

وبالمثل $U(\sigma, f)$ عدد موجباً أو سالباً أو صفراً وبما ان العدد السالب لا يقيس مساحة لهذا فاننا نسمي :

$L(\sigma, f)$ المجموع الاسفل

$U(\sigma, f)$ المجموع الاعلى



الشكل (17-4)

مثال - 4 -

لتكن $f:[1,4] \rightarrow R\ ,\ \ f(x) = 5 + 2x$

جد المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$

الحل

نجزيء الفترة [1 , 4] الى ثلاثة فترات منتظمة فيكون .

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1 \Rightarrow \sigma = (1, 2, 3, 4)$$

∴ الفترات هي : $[1,2]\ ,\ [2,3]\ ,\ [3,4]$ $\quad f(x) = 5 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

∴ لاتوجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها . فنجد قيمة الدالة في طرفي الفترات ولايجاد $L(\sigma, f), U(\sigma, f)$ نعمل الجدول الآتي : فأيهما أصغر فهو m_i وايهما اكبر فهو M_i

الفترة الجزئية [a , b]	طول الفترة h	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1 , 2]	1	$m_1 = 5+2=7$	$M_1 = 5+4=9$	7	9
[2 , 3]	1	$m_2 = 5+4=9$	$M_2=5+6=11$	9	11
[3 , 4]	1	$m_3 = 5+6=11$	$M_3=5+8=13$	11	13
				$\sum h_i m_i = 27$	$\sum h_i M_i = 33$

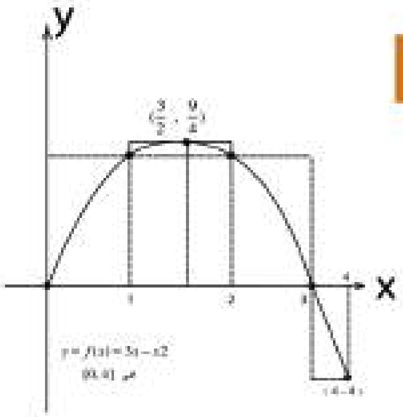
$$\therefore \sum h_i m_i = L(\sigma, f) = 27\ ,\quad \sum h_i M_i = U(\sigma, f) = 33$$

مثال - 5-

اذا كانت $f(x)=3x-x^2$, $f:[0,4]\to R$

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ مستخدماً اربعة تجزيئات منتظمة

الحل



$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1\Rightarrow\sigma=(0,1,2,3,4)$$

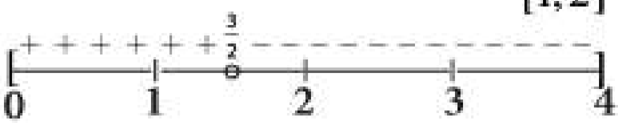
$[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

$$f(x)=3x-x^2\Rightarrow f'(x)=3-2x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\in[1,2]$$

أي ان العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$

اشارة $f'(x)$



الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة h	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				$\sum h_im_i=-2$	$\sum h_iM_i=6\frac{1}{4}$

$$\therefore \sum h_im_i=L(\sigma,f)=-2\quad,\quad \sum h_iM_i=U(\sigma,f)=6\frac{1}{4}$$

لاحظ ان $L(\sigma,f)\le U(\sigma,f)$

ملاحظة في حل تمارين (1 - 4)

1 - نجزء الفترة المعطاة $[a,b]$ الى فترات جزئية بأيجاد h حيث $h=\frac{b-a}{n}$

n عدد الجزيئات منها نجد σ

2 - نجد $f'(x)$ ومنها نجد النقطة الحرجة بجعل $f'(x)=0$

3 - نعمل جدول كما في الامثلة السابقة لتحديد M_i , m_i (لاحظ التزايد ، التناقص) ومنه نجد $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$

تمارين

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ لكل مما يأتي :

1. $f:[-2,1]\to R\ ,\ f(x)=3-x$

a) $\sigma=(-2,0,1)$

b) تقسيم الفترة $[-2\ ,1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

2. $f:[0,4]\to R\ ,\ f(x)=4x-x^2$

اذا كان $\sigma=(0,1,2,3,4)$

3. $f:[1,4]\to R\ ,\ f(x)=3x^2+2x$

a) $\sigma=(1,2,4)$

b) استخدم ثلاث تجزيئات متساوية

[4-3] تعريف التكامل .

لاحظت في البند السابق أنه إذا كانت :

$f:[a,b] \to R$

دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه وفقاً للتجزئة σ يكون $U(\sigma,f) \geq L(\sigma,f)$

والآن نسأل السؤال الآتي : هل يوجد عدد k بحيث : $L(\sigma,f) \leq k \leq U(\sigma,f)$

لأي تجزئة للفترة $[a,b]$ ؟

والجواب : هو ما تنص عليه المبرهنة التالية :

مبرهنة [4-3-1]

اذا كانت : $f:[a,b] \to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه يوجد عدد وحيد k بحيث لأي تجزيء σ للفترة $[a,b]$ فان $L(\sigma,f) \leq k \leq U(\sigma,f)$

نسمي العدد k التكامل المحدد للدالة f على $[a,b]$ ونرمز له $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ التكامل من a الى b للدالة f ونسمي b,a حدّي التكامل

ملاحظات

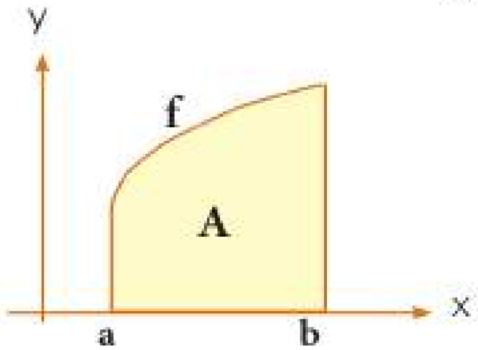
1. اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فان : $L(\sigma,f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(\sigma,f)$

وتكون القيمة التقريبية للتكامل $\dfrac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \int_a^b f(x)dx$

2. اذا كانت : $f(x) \geq 0 , \forall x \in [a,b]$

فان $\int_a^b f(x)dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت منحني f وهو عدد غير سالب .

حيث dx تشير الى ان حدي التكامل b,a قيمتان للمتغير x

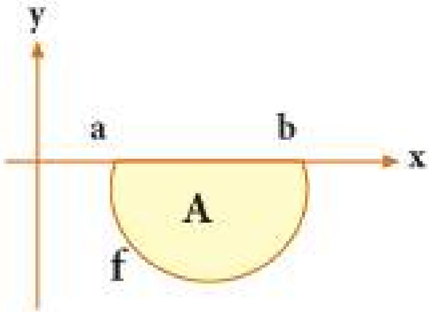


الشكل (4-19)

3. اذا كانت $f(x) \le 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فــإن:

$$\int_a^b f(x)dx \le 0$$

وهذا لا يـدل على المساحــــة ، أما مساحــــة المنطقة A الموضحة في الشكـل (20 - 4) فهي تساوي



الشكل (4-20)

$$-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

4. إن قيمة $\int_a^b f(x)dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى الدالة $f(x)$

مثال - 1-

لتكن $f:[1,3] \to R$ حيث $f(x)=x^2$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\, dx$ اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين .

الحل

$$f(x)=x^2$$

f دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ كثيرة حدود .

$$\therefore f'(x)=2x \quad , \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

أي أن النقطة الحرجة عند $x=0$ وأن $0 \notin [1,3]$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

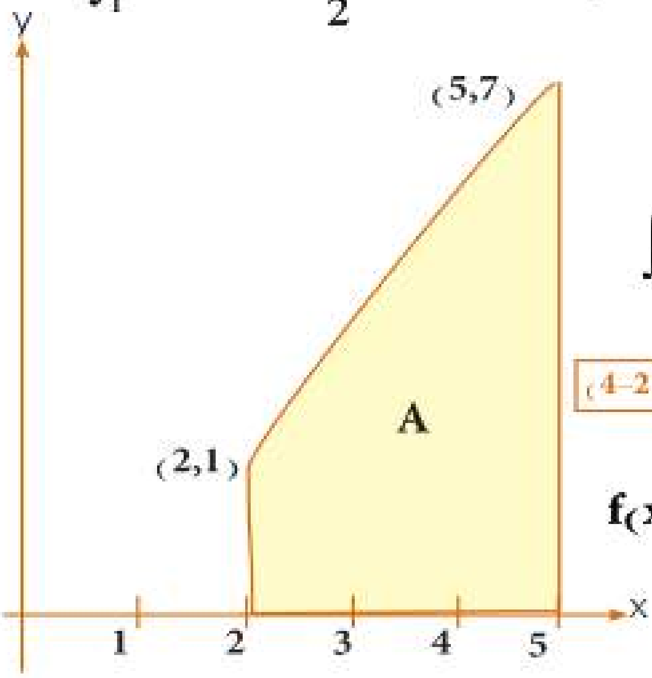
الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	$h_1 m_1$	$h_1 M_1$
$[1,2]$	1	1	4
$[2,3]$	1	4	9

∵أعظم قيمة وأصغر قيمة للدالة تكون عند طرفي كل فترة جزئية اي عند طرفي كل من [1,2] ، [2,3]

$$L(\sigma, f) = (1\times1)+(1\times4) = 1+4 = 5$$

$$U(\sigma, f) = (1\times4)+(1\times9) = 4+9 = 13$$

$$\therefore \int_1^3 x^2\,dx = \frac{5+13}{2} = 9$$ تقريبا



الشكل (4-21)

مثال -2-

لتكن $f:[2,5] \to R$

حيث $f(x) = 2x-3$ أوجد $\int_2^5 f(x)dx$

الحل

لاحظ ان $f(x) > 0 \quad \forall x \in [2,5]$

∴ يمكن ايجاد $\int_2^5 f(x)dx$ من مساحة **A**

وهي منطقة شبه منحرف

∴ مساحة المنطقة $A = \frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × طول الارتفاع.

$$\therefore A = \frac{1}{2}[1+7](3) = \frac{1}{2}(8)(3) = 12 \text{ Unit}^2$$

$$\therefore \int_2^5 f(x)dx = 12$$

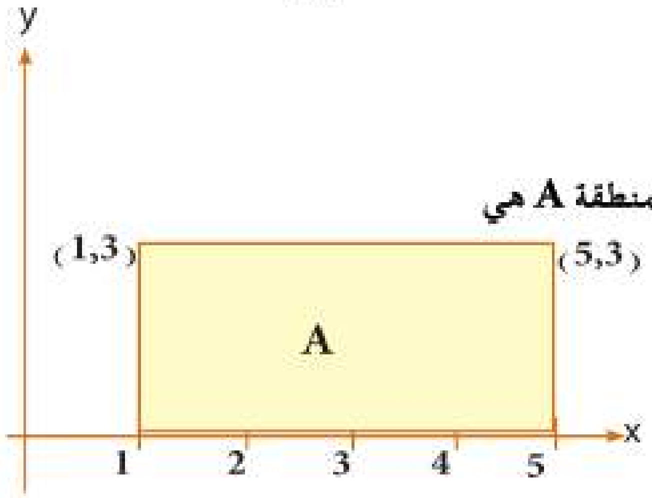
أو يمكن إيجاد $\int_2^5 f(x)dx$ بالطريقة السابقة وكما يأتي:

فترة التجزئة [a,b]	طول الفترة $h_i = b-a$	M_i	m_i	h_iM_i	h_im_i
[2,3]	1	3	1	3	1
[3,5]	2	7	3	14	6
				$\sum h_iM_i = 17$	$\sum h_im_i = 7$

$$\int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Unit}^2$$

مثال – 3-

لتكن $f(x)=3$ ، $f:[1,5]\to R$ أوجد $\int_1^5 f(x)dx$



الشكل (22-4)

الحل

من الشكل (22 – 4) نلاحظ ان المنطقة A هي

منطقة مستطيلة طول قاعدتها =

(1 – 5) = 4 وعرضها = 3

$$\therefore A=(4)(3)=12 \text{ unit}^2$$

$$\therefore \int_1^5 f(x)dx = 12 \text{ unit}^2$$

طريقة ثانية:

فترة التجزئة $[a,b]$	طول الفترة $h_i=b-a$	M_i	m_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,3]$	2	3	3	6	6
$[3,5]$	2	3	3	6	6
				$\sum h_i m_i=12$	$\sum h_i M_i=12$

$$L(\sigma,f)=\sum h_i m_i=12 \quad , U(\sigma,f)=\sum h_i M_i=12$$

$$\int_1^5 3dx=\frac{12+12}{2}=\frac{24}{2}=12 \text{ Unit}^2$$

تمارين

1 . أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{3} \frac{3}{x}\, dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$.

2 . لتكن $f(x) = 3x - 3$, $f : [1,4] \to R$
أوجد قيمة التكامل $\int_{1}^{4} f(x)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f .

3 . أوجد قيمة تقريبية التكامل $\int_{2}^{4} (3x^2 - 3)\, dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4)$.

4 . أوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ حيث $f(x) = -4$

5 .اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{5} x^3 dx$ باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة .

[4-4] النظرية الاساسية للتكامل - الدالة المقابلة:

لقد تعلمنا فيما سبق طريقة إيجاد قيمة للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ حيث f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ كما وجدنا في بعض الحالات الخاصة قيمة دقيقة لهذا التكامل المحدد (باستخدام المساحة).

والمبرهنة الآتية تساعدنا في إيجاد قيمة التكامل المحدد .

مبرهنة [4-4-1]

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث :

$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$

ويكون : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة f (**Antiderivative of The Function**) على الفترة $[a,b]$

فمثلاً : اذا كانت $f:[1,2] \to R \quad , \quad f(x) = 2x$

فان $F:[1,2] \to R \quad , \quad F(x) = x^2$

$F'(x) = 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,2)$

وعليه فان :

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$$
$$= 4 - 1 = 3$$

ملاحظة نشير الى أن $F(2) - F(1)$ تكتب بالصورة $[F(x)]_1^2$

مثال - 1-

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)dx$.

الحل

$$\int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = 3(25) - 3(1) = 75 - 3 = 72$$

ويمكن ان نكتب ذلك بالصورة الآتية :

$$\int_1^5 f(x)\,dx = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5 = 75 - 3 = 72$$

مثال - 2-

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$$F(x) = \sin x \quad , \quad F : [0,\frac{\pi}{2}] \to R$$

فأوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال - 3-

أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$, $F : [1,3] \to R$

هي دالة مقابلة للدالة: $f(x) = 3x^2$

الحل

$\because$ $F(x) = x^3 + 2$ دالـــة مستمـــرة وقابـلـة للاشتقـاق على R

(لانها دالة كثيرة الحدود)

$\therefore F$ مستمرة على $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$.

$$\because \quad F'(x) = 3x^2 = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,3)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f على $[1,3]$.

مثال -4-

أثبت أن الدالة : $F : R \to R \ , \ F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة

$$f : R \to R \ , \ f(x) = \cos 2x$$

ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

الحل

$$f(x) = \cos 2x \ , \ f : R \to R$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R** كما تعلمنا في الصف الخامس العلمي كذلك فان :

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R**

$$\because F'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)(2) = \cos 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in R$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة **f**

$$\because \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

حسب المبرهنة (**4-2**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2} \times 1 - 0 = \frac{1}{2}.$$

وفي ما يلي جدول مساعد يبين الدالة **f** والدالة المقابلة لها F في حالات خاصة . وبإمكانك عزيزي الطالب أن تتحقق من صحة ذلك بإثبات أن :

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

وفيما يلي جدول مساعد يبيّن الدالة f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n \ , \ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \ , \ n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n . f'(x) \ , \ n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$-\frac{1}{a}\csc ax$

مجموعة الدوال المقابلة لاية دالة f كما في الجدول هي $F + C$ حيث C عدد ثابت حقيقي

مثال -5-

أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال -6-

أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4} = 0 + 1 = 1$$

مثال -7-

أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \, \tan x \, dx$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \, \tan x \, dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

مثال -8-

جد $\int_1^3 x^3 dx$

الحل

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

[4-5] خواص التكامل المحدد :

اولاً :

1. f دالة مستمرة على [a,b] فاذا كانت :

$f(x) \ge 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

فمثلاً :

a) $f(x) = x^2 \ge 0 \ , \ \forall x \in [-1,2]$ لأن : $\int_{-1}^{2} x^2 dx \ge 0$

b) $f(x) = 3 > 0 \ , \ \forall x \in [-2,3]$ لأن : $\int_{-2}^{3} 3dx > 0$

c) $f(x) = (x+1) > 0 \ , \ \forall x \in [2,3]$ لأن : $\int_{2}^{3} (x+1)dx > 0$

2. f دالة مستمرة على [a,b] فاذا كانت : $f(x) \le 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

فمثلاً :

a) $f(x) = -2, f(x) < 0, \forall X \in [1,2]$: لان $\int_1^2 (-2)dx < 0$

b) $f(x) = x, f(x) < 0, \forall X \in [-2,-1]$: لان $\int_{-2}^{-1} x\, dx < 0$

ثانياً :

f دالة مستمرة على [a,b] ، c عدداً حقيقياً ثابتاً فان : $\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

مثال - 9 -

اذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فاوجد $\int_2^5 5f(x)dx$.

الحل

$$\int_2^5 5f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5(8) = 40$$

ثالثاً :

إذا كانت الدالتان f_1, f_2 مستمرتين على الفترة [a,b] فان : $\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على [a,b]

مثال - 10- اذا كانت $\int_1^3 f_2(x)dx = 17$, $\int_1^3 f_1(x)dx = 15$ فأوجد كلاً من:

$$\int_1^3 (f_1(x)+f_2(x))dx \quad , \quad \int_1^3 (f_1(x)-f_2(x))dx$$

الحل

$$\int_1^3 (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx = 15+17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x)-f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx = 15-17 = -2$$

مثال - 11- اذا كانت $f(x) = 3x^2+2x$ فأوجد $\int_1^2 f(X)dx$

الحل

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2+2x)dx = \int_1^2 3x^2dx + \int_1^2 2x \ dx$$

$$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8-1)+(4-1) = 7+3 = 10$$

رابعاً:

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال - 12- اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5+8 = 13$$

مثال - 13-

لتكن $f(x)=|x|$ اوجد $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

الحل

f دالة مستمرة على $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x)=\begin{cases} x & ,\forall x \geq 0 \\ -x & ,\forall x<0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{4} xdx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[0+\frac{9}{2}\right]+\left[\frac{16}{2}-0\right]=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}$$

مثال - 14-

اذا كانت : $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \forall x \geq 1 \\ 3 \quad ,\forall x<1 \end{cases}$ فأوجد

$$\int_{0}^{5} f(x)dx$$

الحل

f مستمرة على الفترة $[0,5]$ وذلك لانها :

مستمرة عند $x=1$ لأن:

(i) $f(1)=2(1)+1=3$ معرفة

$$\text{(ii)} \lim_{x\to1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+}(2x+1)=3=L_1 \\ \lim\limits_{x\to1^-} 3=3=L_2 \end{cases}$$

$\because L_1=L_2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=3$ موجودة $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x : x > 1\}$, $\{x : x < 1\}$. وبما ان الدالة مستمرة على $[0,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx = [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3-0] + [25+5] - [2] = 3 + 28 = 31$$

خامساً :

$$a) \int_a^a f\ (x)dx\ = 0 \qquad b) \int_a^b\ f\ (x)dx\ = -\int_b^a f\ (x)dx$$

مثلاً :

$$a) \int_3^3 x\ dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

او اختصاراً وحسب القاعدة

$$\int_3^3 x\ dx = 0$$

$$b) \int_3^2 3\ x^2dx = -\int_2^3 3x^2dx$$

$$= -[x^3]_2^3$$

$$= -[27] + [8] = -19$$

تمارين

1. احسب كلاً من التكاملات الاتية:

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx$ b) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)dx$

c) $\int_{1}^{3}(x^{4}+4x)dx$ d) $\int_{0}^{2}|x-1|dx$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)dx$ f) $\int_{3}^{2}\frac{x^{3}-1}{x-1}dx$ g) $\int_{1}^{3}\frac{2x^{3}-4x^{2}+5}{x^{2}}dx$

2. أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ حيث $F(x)=\sin x+x$

$f(x)=1+\cos x$ حيث $f:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ ثم احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx$.

3. أوجد كلاً من التكاملات الاتية:

a) $\int_{1}^{4}(x-2)(x+1)^{2}dx$ b) $\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

c) $\int_{2}^{3}\frac{x^{4}-1}{x-1}dx$ d) $\int_{0}^{1}\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^{2}dx$

4. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x, & \forall x\geq 3\\ 6, & \forall x<3\end{cases}$ جد $\int_{1}^{4}f(x)dx$

5. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^{2}, & \forall x\geq 0\\ 2x, & \forall x<0\end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3}f(x)dx$

[4-6] التكامل غير المحدد : Indefinite Integral

عرفنا في النظرية الاساسية للتكامل أنه إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة مقابلة F مستمرة على $[a,b]$ بحيث أن: $F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$

فمثلاً :

$F(X) = X^2$ ، $F : [1,3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 2x$.

ولكن هل $F(x) = x^2$ دالة مقابلة وحيدة للدالة $F'(X) = 2X$ ؟

وقبل الاجابة عن هذا السؤال نتأمل الدوال الآتية :

1) $F_1 : [1,3] \to R \quad , \quad F_1(x) = x^2 + 1$

2) $F_2 : [1,3] \to R \quad , \quad F_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

3) $F_3 : [1,3] \to R \quad , \quad F_3(x) = x^2 - \sqrt{2}$

4) $F_4 : [1,3] \to R \quad , \quad F_4(x) = x^2 - 5$

اننا نلاحظ أن كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 لها صفات F نفسها أي أنّ كلاً منها :

i) مستمرة على $[1,3]$

ii) قابلة للاشتقاق على $(1,3)$

كثيرة الحدود

iii) $\forall x \in (1,3) \quad , \quad F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = F_4'(x) = 2x$.

وبناءاً على ذلك يمكن القول بان كلاً من: F_1, F_2, F_3, F_4 دالة مقابلة الى f.

أي انه توجد اكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على $[1,3]$ والفرق بين أي دالتين مقابلتين للدالة f يساوي عدداً ثابتاً لاحظ أن :

$$F_1(x) - F_2(x) = (x^2 + 1) - (x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$F_1(x) - F_4(x) = (x^2 + 1) - (x^2 - 5) = 6$$

وهكذا

وبصورة عامة

اذا كانت للدالة **f** المستمرة على $[a,b]$ دالة مقابلة **F** فان يوجد عدد لانهائي من الدوال المقابلة للدالة **f**، كل منها تكون من الصورة : **F + C** حيث **C** عدداً ثابتاً والفرق بين أي إثنتين منها يساوي عدداً ثابتاً .

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي على الصورة **F + C** بالتكامل غير المحدد للدالة **f** المستمرة على $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ إذا كان رمز المتغير **x**.

كما يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على الصورة :

$\int f(x)dx = F(x)+C \quad ,C \in R$ عدد ثابت

مثال - 1-

أوجد $\int f(x)dx$ اذا علمت أن :

$a)f(x)=3x^2+2x+1$

$b)f(x)=\cos x+x^{-2}$

$c)f(x)=x+\sec x\tan x$

$d)f(x)=\sin(2x+4)$

الحل

$$a)\ \int (3x^2+2x+1)dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x+c=x^3+x^2+x+c$$

$$b)\ \int (\cos x+x^{-2})dx=\sin x+\frac{x^{-1}}{-1}+c=\sin x-\frac{1}{x}+c$$

$$c)\ \int (x+\sec x\tan x)dx=\frac{x^2}{2}+\sec x+c$$

$$d)\ \int \sin(2x+4)dx=\frac{-1}{2}\cos(2x+4)+c$$

مثال - 2 -

جد التكاملات لكل مما يأتي :

a. $\int (x^2+3)^2(2x)dx$

الحل

لنفرض أن

$$f(x)=x^2+3$$

$$\therefore f'(x)=2x$$

$$\int (x^2+3)^2(2x)dx=\int [f(x)]^2 f'(x)dx=\frac{1}{3}[f(x)]^3+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+3)^3+c$$

b. $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx$

نفرض أن :

$$f(x)=3x^2+8x+5 \Rightarrow f'(x)=6x+8$$

$$\therefore \int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx=\frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6(6x+8)dx$$

$$\frac{1}{2}\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7+c$$

c. $\int \sin^4 x\cos x dx$

نفرض أن :

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos x dx=\int [f(x)]^4 . f'(x)dx=\frac{[f(x)]^5}{5}+c=\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

d. $\int \tan^6 x \sec^2 x dx$

نفرض أن :

$$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$$

$$\therefore \int \tan^6 x \sec^2 x dx=\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{7}\tan^7 x+c$$

[4-6-1] تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1. $\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + c$

2. $\int \csc^2\theta \, d\theta = -\cot\theta + c$

3. $\int \tan^2\theta \, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^2\theta \, d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$

4. $\int \cot^2\theta \, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

5. $\int \sin^2\theta \, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{4}\int \cos 2\theta (2) d\theta$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

6. $\int \cos^2\theta \, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

أمثلة

جد تكاملات كل مما يأتي :

1. $\int 9\sin 3x\,dx = 3\int 3\sin 3x\,dx = -3\cos 3x + c$

2. $\int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3 dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

3. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx$

$= \pm\int (\sin x - \cos x)dx = \pm(\cos x + \sin x) + c$

4. $\int \sin^4 x \, dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

5. $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

6. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

7. $\int \cos^3 x dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

9. $\int \sin 6x \cos^2 3x dx = \int (2\sin 3x \cos 3x)\cos^2 3x dx = 2\int \cos^3 3x \sin 3x dx$

$$= \frac{-2}{3} \times \frac{\cos^4 3x}{4} + c = -\frac{1}{6}\cos^4 3x + c$$

10. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

11. $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

12. $\int \cot^2 5x dx = -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

13. $\int \tan^2 7x dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

تمارين

جد تكاملات كل مما يلي ضمن مجال الدالة :

1. $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx$

2. $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}dx$

3. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$

4. $\int \csc^2 x \cos x \, dx$

5. $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}dx$

7. $\int \sin^3 x dx$

8. $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

9. $\int (3x^2+1)^2 dx$

10. $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

11. $\int (1+\cos 3x)^2 dx$

12. $\int \sec^2 4x \, dx$

13. $\int \csc^2 2x \, dx$

14. $\int \tan^2 8x \, dx$

15. $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx$

16. $\int \cos^2 2x \, dx$

17. $\int \sin^2 8x \, dx$

18. $\int \cos^4 3x \, dx$

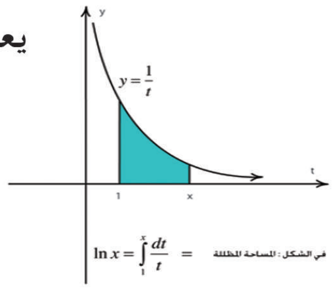
[4-7] اللوغارتم الطبيعي The Natural Logarithmic

درسنا دوالاً مألوفة نوعاً ما . فكثيرات الحدود والدوال النسبية وغيرها من الدوال الجبرية تنتج عن عمليات مألوفة في الحساب والجبر ، ويمكن مطابقة قيم الدوال المثلثية باحداثيات نقط على دائرة الوحدة . اما الان فندرس دالة اللوغارتم الطبيعي التي تعتمد على حساب التفاضل والتكامل حتى في تعريفها .

تعريف [4-7-1]

يعرَّف لوغارتم **x** الطبيعي ، ويرمز له بـ (**ln x**) بأنه :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad ; \quad \forall x > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \; (1$$



يمثل هذا التكامل لكل **x** اكبر من **1** ، المساحة المحدودة من الاعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الاسفل بالمحور **t** ، ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$

يعرَّف لوغارتم **x** الطبيعي ، ويرمز له بـ (**ln x**) بأنه :

اي اذا كان $x = 1$ ، تطابق الحدان الايمن والايسر للمساحة واصبحت المساحة صفراً .

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 \qquad \left(\int_a^a f(x)dx = 0 \right)$$

اما اذا كانت **x** اصغر من **1** واكبر من الصفر فعندئذ يكون الحد الايسر هو المستقيم $t = x$ ، والحد الايمن هو $t=1$ وفي هذه الحالة يكون التكامل :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحني بين **x** و **1** .

* ينسب اول اكتشاف للوغاريتم الطبيعي الى النبيل الاسكتلندي **John Napier** (1550 - 1617)

وفي كل الحالات ، x عدداً موجباً ، فانه يمكن حساب قيمة التكامل المحدد في المعادلة (1) الى اي عدد نرغب فيه من الارقام العشرية كما مر بنا في حساب المساحة تحت المنحني بالتقريب .

وبما ان الدالة $F(x) = \ln x$ معرفة بالتكامل

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad , \quad \forall x > 0$$

فانه من المبرهنة الاساسية لحساب التكامل في البند (4-4) نعلم ان: $F'(x) = \frac{1}{x}$

اي ان :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

كما يمكننا الحصول على صيغة أعم عندما يكون لدينا $\ln u$ حيث u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x

فقاعدة السلسلة للمشتقات (**Chain Rule**) تعطينا :

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow d(\ln u) = \frac{1}{u} du$$

مثال - 1- اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot \frac{d(3x^2 + 4)}{dx}$$

$$= \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

ان الصيغة $d(\ln u) = \frac{1}{u} du$ تقودنا الى $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ وبشرط ان تكون u موجبة

مثال -2- جد $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta}$

الحل

نفرض

$$u = 1+\sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow du = \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln|1+\sin\theta| + c$$

[4-7-2] دالة اللوغارتم الطبيعي.

لتكن $y = \ln x$

لو ابدلنا x ، y في مجموعة الازواج المرتبة: $\{(x,y) : y = \ln x \ , \ x > 0\}$

لحصلنا على دالة نرمز لها $x = \ln^{-1}(y) \quad , \quad y > 0, \quad x \in R$

$$x = e^y$$

ويكون مجال $\ln^{-1}(y)$ هو مدى $\ln(x)$

نتيجة : الدالة الأسية e^x (اساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي وتستنتج جميع خواصها من هذه الحقيقة.

مبرهنة [4-7-3]

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$$

البرهان

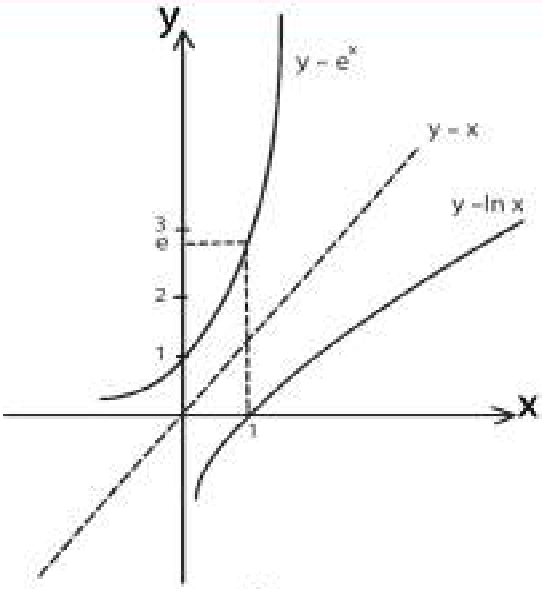
لتكن

$y=e^{x}$

$\therefore x=\ln y \Rightarrow$

$1=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx}=y=e^{x}$



وبصورة عامة

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}}$$

مثال - 3- لتكن $y=e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{d(e^{\tan x})}{dx}=e^{\tan x}\cdot\frac{d(\tan x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{\tan x}\cdot\sec^{2}x$$

ملاحظه

ان صيغة التفاضل $d\left(e^{u}\right)=e^{u}\frac{du}{dx}$ تقودنا الى صيغة التكامل : $\int e^{u}du=e^{u}+c$

مثال - 4- جد $\int xe^{x^{2}}dx$

الحل

نفرض ان : $x^{2}=u \Rightarrow 2xdx=du$

$$\therefore \int e^{x^{2}}xdx=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+c=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+c$$

تعريف [4-7-4]

اذا كان a عددا موجباً ، فان $a^{u}=e^{u\ln a}$

مبرهنة [4-7-5]

$$\frac{da^u}{dx} = a^u . \frac{du}{dx} \ln a$$

البرهان :

$$\frac{da^u}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{u \ln a}\right)$$

$$= e^{u \ln a} . \frac{d}{dx}(u \ln a)$$

$$\boxed{\therefore \frac{da^u}{dx} = a^u . \frac{du}{dx} . \ln a}$$

مثال - 5 -

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = 3^{2x-5}$ b) $y = 2^{-x^2}$ c) $y = 5^{\sin x}$

الحل

a) $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} \quad (2).\ln 3$

$= (2 \ln 3)\ 3^{2x-5}$

b) $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} \quad (-2x).\ln 2$

$= (-2x \ln 2)(2^{-x^2})$

c) $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \quad .\cos x \left(\ln 5\right)$

$= (\ln 5).5^{\sin x}.\cos x$

تمارين

1 - جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \ln\left(x^2\right)$

d) $y = (\ln x)^2$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

j) $y = x^2 e^x$

2 - جد التكاملات الاتية:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

e) $\int_0^1 \left(1+e^x\right)^2 e^x dx$

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}}$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

j) $\int \cot^3 5x \, dx$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \, dx$

l) $\int_1^2 x \, e^{-\ln x} \, dx$

3 - اثبت ان :

a) $\int_{1}^{8} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$ b) $\int_{-2}^{4} |3x-6| dx = 30$

4 - $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2 , 6]$ فاذا كان $\int_{1}^{6} f(x)dx = 6$ وكان

$\int_{-2}^{6} [f(x)+3] dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

5 - جد قيمة $a \in R$ اذا علمت أن $\int_{1}^{a} (x+\frac{1}{2})dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

6 - لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{1}^{3} f(x)dx$

7 - إذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_{0}^{b} f'(x)dx - \int_{0}^{a} f''(x)dx$$

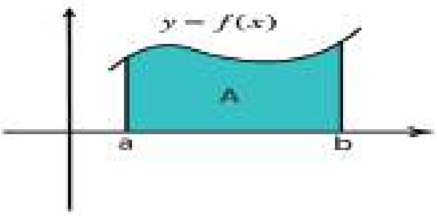
[4-8] إيجاد مساحة المنطقة المستوية.
Plane Area by Definite Integral

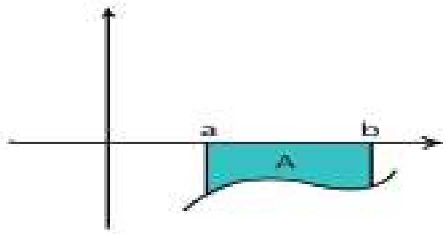
[4-8-1] مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات
The area between a Curve and the x-axis

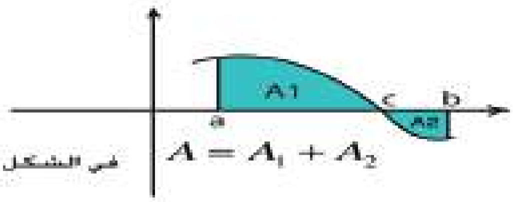
لتكن $y=f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x=a, x=b$:

اذا كانت $f(x)>0$ فان المساحة A تساوي : $A=\int_a^b f(x)dx$

إذا كانت $f(x)<0$ فان المساحة A تساوي : $A=-\int_a^b f(x)dx$







في الشكل f تغير اشارتها في الفترة [a,b] عند العدد $c \in (a,b)$

الشكل (4-23)

وعندما يقطع منحني الدالة $y=f(x)$ محور السينات في $x=a$ ، $x=b$ نتبع الخطوات الاتية :

خطوات ايجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة وقيم سالبة على الفترة $[a,b]$:

1. نجد النقاط عندما $f(x)=0$.
2. نستخدم قيم x التي تجعل $f(x)=0$ كموقع على $[a,b]$ لتحصل على فترات جزئية من $[a,b]$.
3. نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية.
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3).

مثال - 1 -

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

الحل

الخطوة الاولى : نجعل

$$f(x)=0$$

$$\therefore x^3-4x=0$$

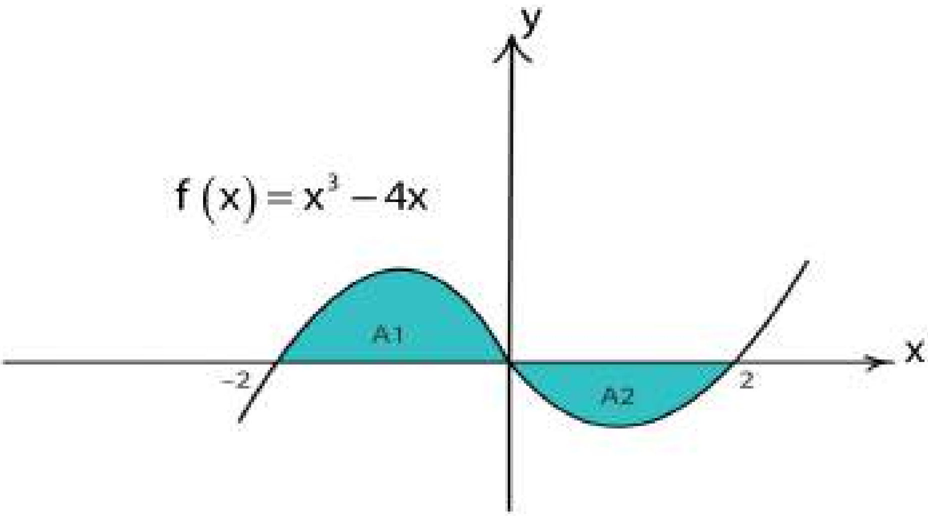
$$x(x^2-4)=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0$$

$$\therefore x=0 \quad , \quad x=2 \quad , \quad x=-2$$

الخطوة الثانية : فترات التكامل هي : $[0,2]$ ، $[-2,0]$

الخطوة الثالثة :



$$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=0-[4-8]=4$$

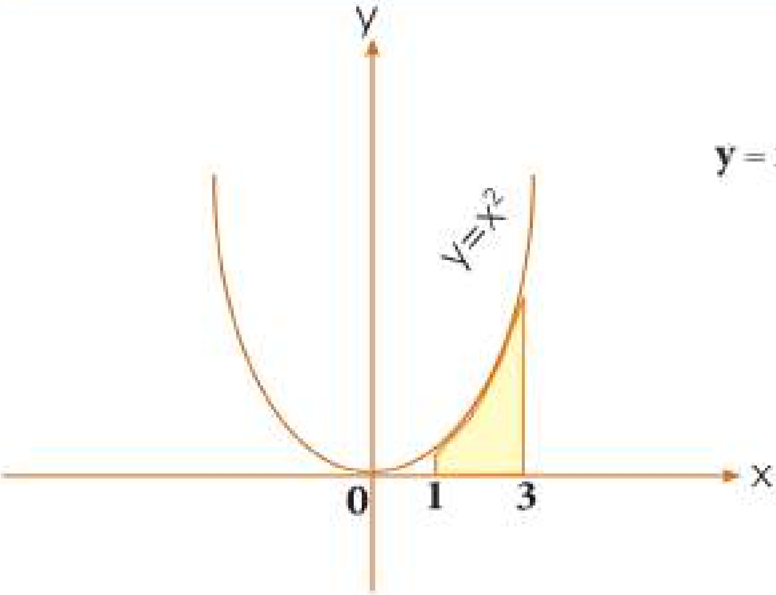
$$A_2=\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=[4-8]-0=-4$$

الخطوة الرابعة : جمع القيم المطلقة للتكاملات

$A=|A_1|+|A_2| \Rightarrow A=|4|+|-4| = 4+4=8$ وحدة مربعة

مثال - 2-

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$
ومحور السينات والمستقيمان $x = 1 , x = 3$.



الشكل (4-24)

الحل

نقاطع الدالة مع محور السينات بجعل $y = 0$.

$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

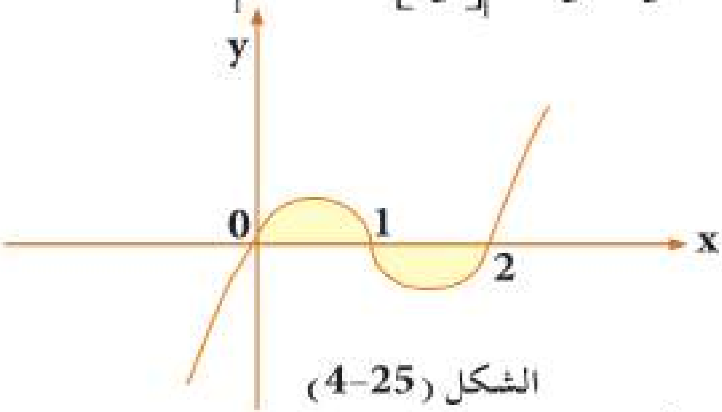
∴ لا تجزئة لفترة التكامل

$\because f(x) \geq 0 , x \in [1,3]$

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$ وحدة مساحة

مثال - 3-

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.



الشكل (4-25)

الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$$

∴ فترات التكامل هنا : $[1,2]$ ، $[0,1]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = (\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$A_2 = (4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

مثال - 4 -

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل

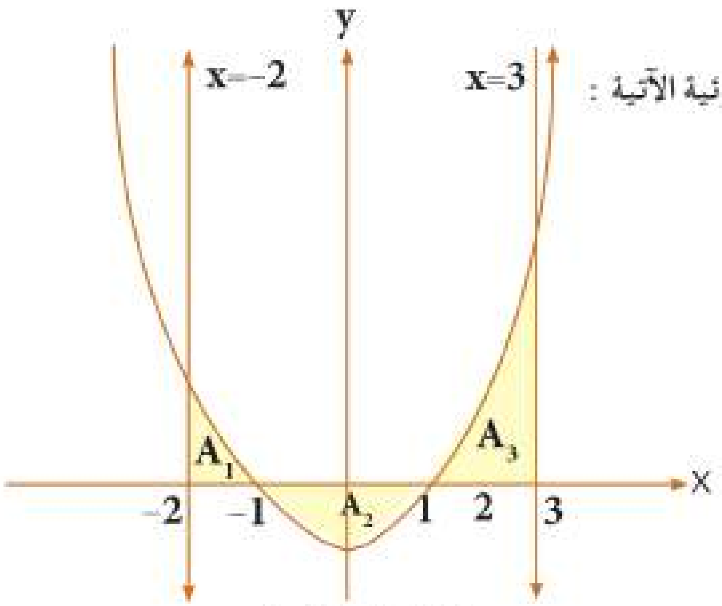
نجد تقاطع المنحني مع محور السينات

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

∴ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية :

$[-2,-1]$ ، $[-1,1]$ ، $[1,3]$



الشكل (4-26)

نجد التكاملات :

$$A_1=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1=\left[\frac{-1}{3}+1\right]-\left[\frac{-8}{3}+2\right]=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_2=\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[\frac{-1}{3}+1\right]=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$A_3=\int_{1}^{3}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}$$

$$A_3=[9-3]-[\frac{1}{3}-1]=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$$

$$A=|A_1|+|A_2|+|A_3|$$

نجمع القيم المطلقة للتكاملات :

$$\therefore A=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|-\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|=9\ \frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

مثال - 5 -

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات وعلى الفترات $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$\because \ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \ , n \in Z$$

$$\therefore \quad n = 0 \Rightarrow x = \quad 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

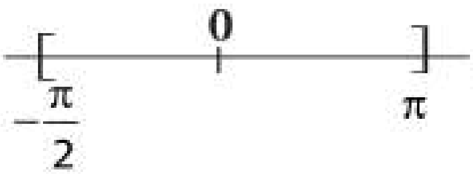
$$n = 1 \Rightarrow x = \quad \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

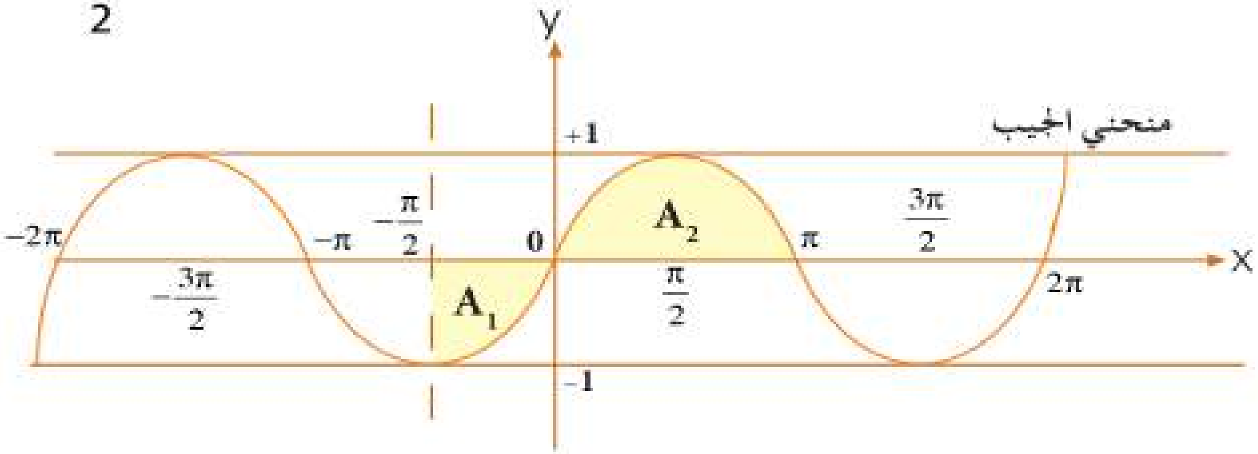
$$n = 2 \Rightarrow x = \quad 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \quad -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$n = -2 \Rightarrow x = \quad -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$\therefore$ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية :





الشكل (4-27)

ثم نجد التكامل كما يأتي :

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos(0) + \cos(-\frac{\pi}{2})$$

$$A_1 = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0$$

$$A_2 = 1 + 1 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$\therefore A = |-1| + |2| \Rightarrow A = 3$ وحدة مساحة

مثال - 6-

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;,\; n \in Z$$

$$\therefore \quad n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

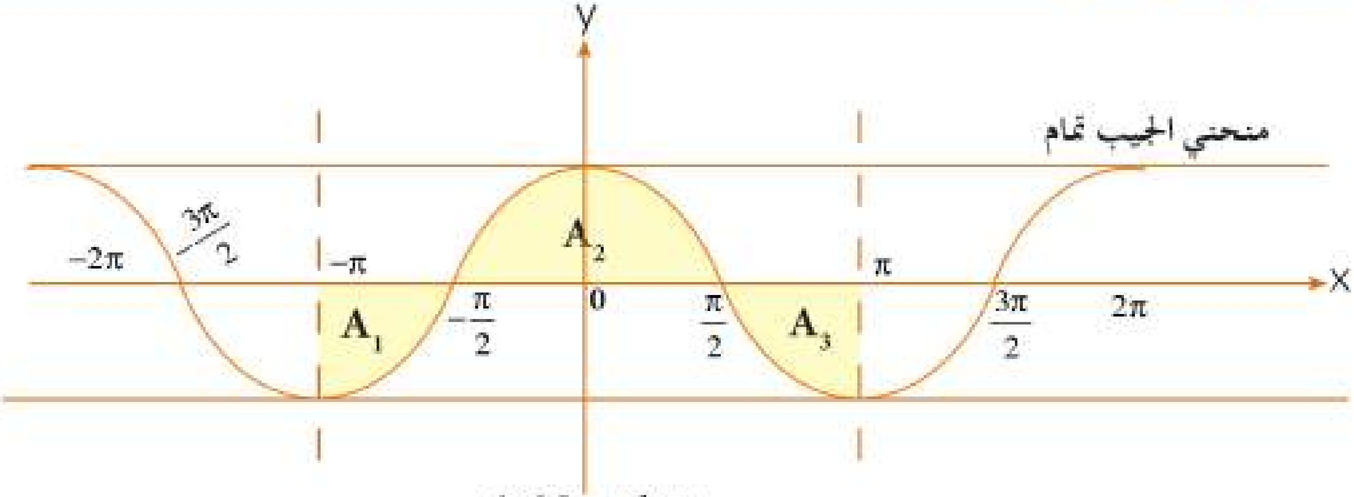
$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

$$n = -2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية

$$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



الشكل (4-28)

نجد التكاملات :

$$A_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1=\sin(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\pi)=-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi=-1+0=-1$$

$$A_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(-\frac{\pi}{2})=1+1=2$$

$$A_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}=0-1=-1$$

نجد مجموع القيم المطلقة للتكاملات: $A=|A_1|+|A_2|+|A_3|$

$A=|-1|+|2|+|-1|=1+2+1=4$ وحدة مساحة

[4-8-2] مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

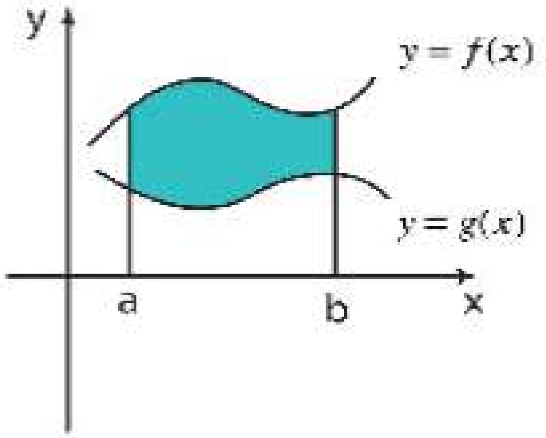
سبق وأن درسنا كيفية أيجاد المساحة بين منحني دالة ومحور السينات ومستقيمين والآن سندرس كيفية إيجاد مساحة المنطقة المحصور بين منحنيين :

لتكن $g(x), f(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان مساحة المنطقة **A** المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي :

1) اذا كان $f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

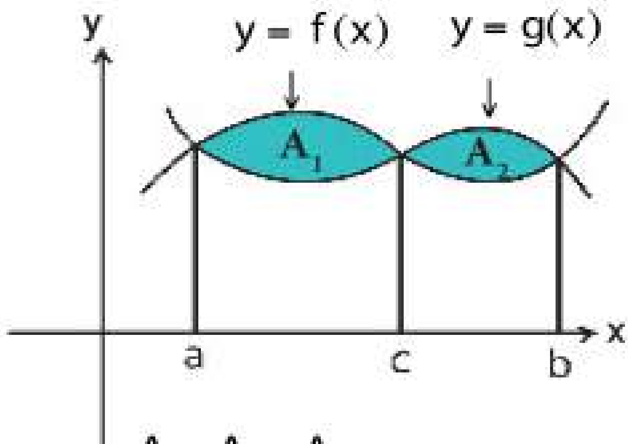
2) اذا كانت $f(x) < g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = -\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

3) اذا تقاطع المنحنيان بين $[a,b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم x التي تنتمي الى (a,b) ونجزئة $[a,b]$ الى فترات جزئية ثم نجد تكامل الفرق بين الدالتين في كل فترة جزئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة .



$f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$$

مثال - 1 -

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x$

الحل

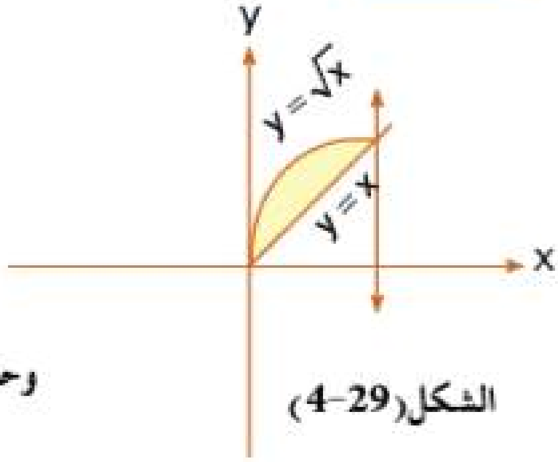
نجد تقاطع المنحنيين: $\sqrt{x}=x$

$$\therefore x=x^2 \Rightarrow x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0, x=1 \Rightarrow x\in[0,1]$$

$$A=\left|\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]-[0]\right|=\frac{1}{6} \quad \therefore A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$ وحدة مساحة



الشكل (4-29)

مثال - 2 -

جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^3$ والمستقيم $y=x$

الحل

تقاطع الدالتين $x^3=x$

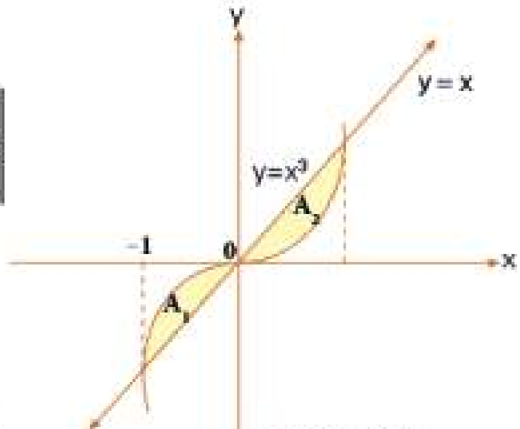
$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$x=0,\ x=1,\ x=-1 \Rightarrow [-1,0],[0,1]$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^3-x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|0-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\right|+\left|(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})-(0)\right|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

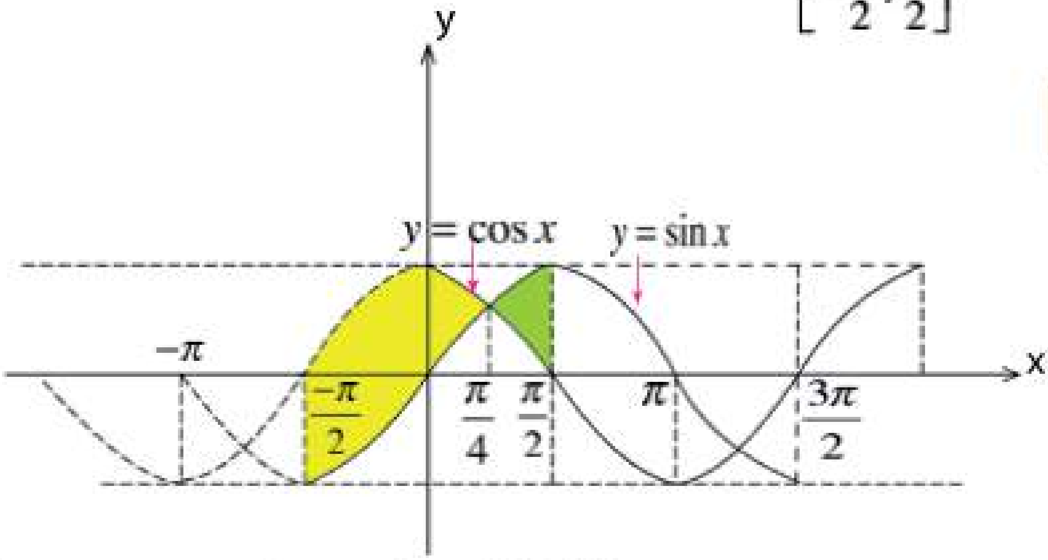


الشكل (4-30)

مثال - 3- جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل



$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$ تقاطع الدالتين

$$\therefore x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ∴ نجزئ التكامل

$A = |A_1| + |A_2|$

$$\therefore A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx\right|$$

$$= \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2})\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right|$$

$A = \left|\sqrt{2} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

[4-8-3] المسافة The Distance

لتكن $V(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ فأن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي :

$$d = \left|\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt\right|$$

حيث **d** تمثل المسافة، المسافة كمية غير متجهة أما الأزاحة **s** والسرعة **v** والتعجيل **a** فان كلاً منها كمية متجهة لذا فان :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt \quad و \quad v = \int a(t)dt$$

مثال – 1 –

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4 \ m/s$

فجد :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

b) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

الحل

a) من الواضح أن الجسم يغير اتجاهه

$$\therefore 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3] \Rightarrow [1,2],[2,3]$$

$$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right| = \left|\left[t^2 - 4t\right]_1^2\right| + \left|\left[t^2 - 4t\right]_2^3\right|$$

$$= |(4-8)-(1-4)| + |(9-12)-(4-8)| = 1 + 1 = 2m$$

b) $s=\int_1^3 (2t-4)dt=[t^2-4t]_1^3=[9-12]-[1-4]=0$

c) $d=\left|\int_4^5 (2t-4)dt\right|=\left|[t^2-4t]_4^5\right|=\left|[25-20]-[16-16]\right|=5m$

d) $s=\int_0^4 (2t-4)dt=[t^2-4t]_0^4=[16-16]-[0]=0$

مثال - 2-

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)m/s$
بعد مرور 4 ثواني من بد الحركة جد :
a) المسافة خلال الثانية الثالثة
b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

الحل

a) $V=\int a(t)dt \Rightarrow V=\int 18dt$

$\therefore V=18t+c$ $\qquad V=82, t=4$

$82=(18\times4)+c \Rightarrow c=10$

$\therefore V=18t+10$

بما أن

$18t+10>0 \Rightarrow V>0$

$\therefore d=\int_2^3 (18t+10)dt=\left[9t^2+10t\right]_2^3=[81+30]-[36+20]=55m$

b) $S=\int_0^3 (18t+10)dt=\left[9t^2+10t\right]_0^3=[81+30]-[0]=111m$

تمارين

1 . جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=-1$, $x=1$.

2 .جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحورالسينات .

3 . جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات .

4 . جد المساحة المحددة بالمنحني $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5 . جد المساحة المحددة بالمنحني $y=2\cos^2 x-1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

6 . جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\frac{1}{2}x, y=\sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2,5]$

7 . جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^2, y=x^4-12$.

8 . جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x)=\sin x\cos x, f(x)=\sin x$ حيث $x \in [0,2\pi]$

9 . جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x)=\sin x, f(x)=2\sin x+1$ حيث $x \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

10 . جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات .

11 . جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=\left(3t^2-6t+3\right)m/s$ إحسب :

a) المسافة المقطوعة في الفترة [2,4]

b) الازاحة في الفترة [0,5]

12 . جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90m/s$ إحسب :

a) السرعة عندما t-2

b)المسافة خلال الفترة [1,2]

c) الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

13 . تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t-6t^2)$ m/s أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه، ثم احسب التعجيل عندها

[4-9] الحجوم الدورانية: Volumes of Revolution

1 . لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ حول محور السينات

نطبق العلاقة التالية $\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 dx}$

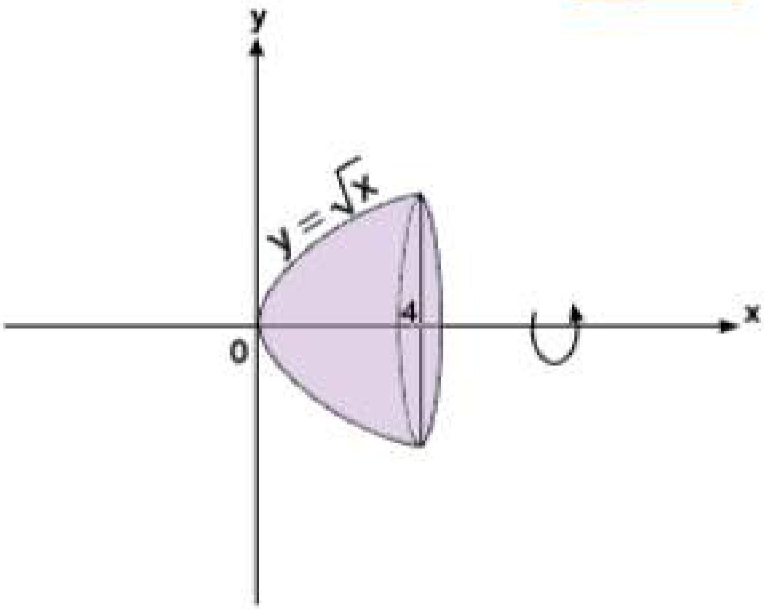
2 . لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y= a$ الى $y=b$ حول محور الصادات

نطبق العلاقة التالية: $\boxed{V = \pi \int_a^b x^2 dy}$

مثال - 1-

المنطقة المحددة بين المنحني $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ ومحور السينات، دارت حول محور السينات، جد حجمها .

الحل



$$v = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x \; dx$$

$$= \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$$

مثال - 2 -

المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$ ، $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها .

الحل

$$v = \int_1^4 \pi x^2 dy = \int_1^4 \frac{\pi}{y} dy = [\pi \ln y]_1^4 = \pi \ln 4 - 0 = 2\pi \ln 2$$ وحدة مكعبة

مثال - 3 -

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x=0$, $x=2$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = 4\pi \left[x^2\right]_0^2 = 16\pi$$ وحدة مكعبة

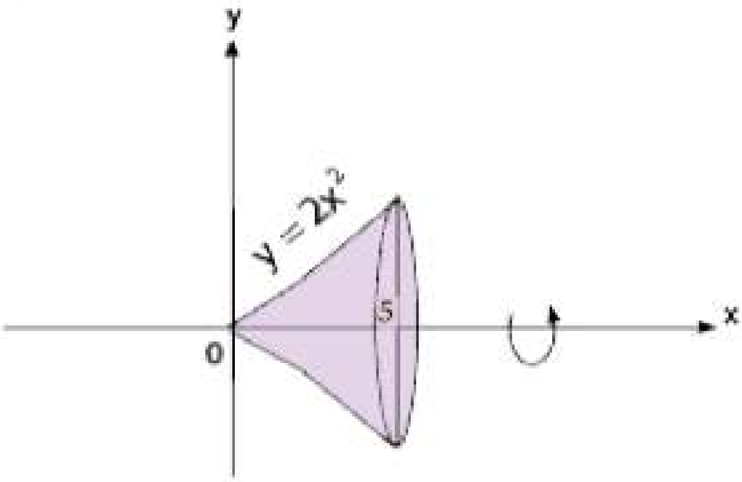
مثال - 4 -

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 0, x = 5$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b \pi v^2 dx = \pi \int_0^5 4x^4\, dx = \frac{4\pi}{5}\left[x^5\right]_0^5$$

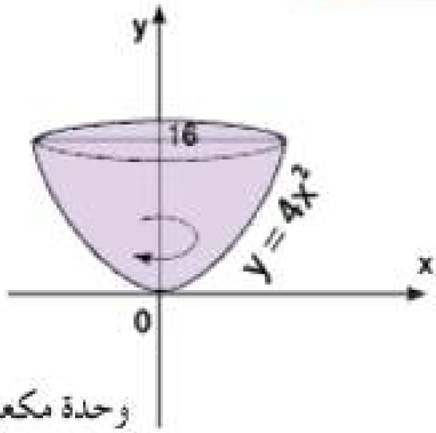
$$= \frac{4\pi}{5} \times 3125 = 2500\pi$$ وحدة مكعبة



مثال - 5 -

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y=16$, $y=0$ حول المحور الصادي.

الحل



$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

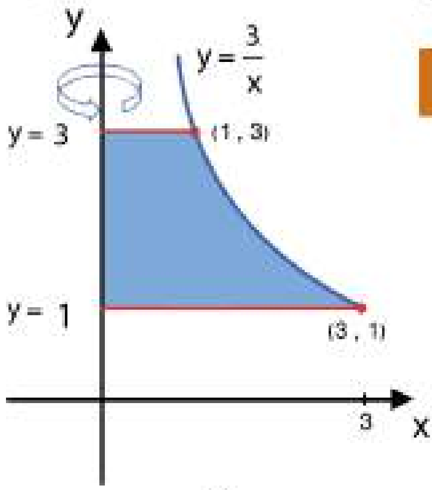
$$v = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \frac{\pi}{8}\left[y^2\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}[16 \times 16] = 32\pi$$

وحدة مكعبة

مثال - 6 -

اوجد الحجم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ ، $1 \le y \le 3$ ، دورة كاملة حول المحور الصادي .

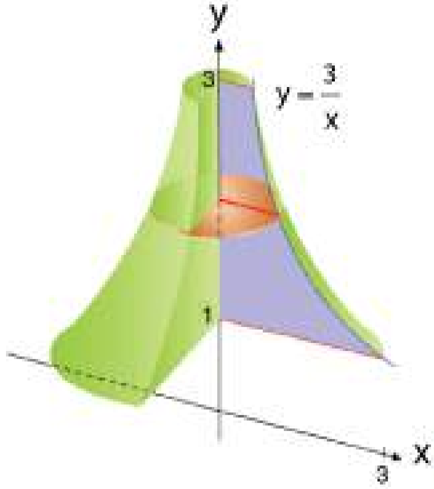
الحل



$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^3 \left[\frac{3}{y}\right]^2 dy = 9\pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^3$$

$$= 9\pi \left[\frac{-1}{3} + 1\right] = 6\pi \text{ Unit}^3$$



تمارين

1 . اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني .

2 . اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي .

3 . احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي .

4 . احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني .